



Màster universitari en **Formació del Professorat d'Educació Secundària
Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes**

Treball de fi de màster

Títol:

ANNEX

**Sense llapis ni paper. Elaboració de material didàctic per a afavorir el
càlcul mental a l'ESO.**

Cognoms: García Polo

Nom: Laura

Titulació: Màster en Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat,
Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes

Especialitat: Matemàtiques

Director/a: Alberich Carramiñana, Maria

Data de lectura: 25 de Juny de 2014



Índex de l'Annex:

1. Solucions al material proposat (material per al docent)
2. Prova tipus del Campionat Mundial de Càlcul Mental

Càlcul mental exacte

Imagina que volguessis calcular, per exemple, quin és el preu de pintar una paret d'11m² si la pintura que t'agrada val 5.8€/m², o quant et costarà un menú si has demanat dos plats que valen 10.25 i 8.90€ respectivament. Imagina també que en aquell precís moment no disposes de la calculadora per a poder obtenir el resultat. Aleshores, què faries?

Està demostrat que el càlcul mental és molt més ràpid que efectuar una operació amb calculadora. Amb els exercicis que et proposem a continuació podràs treballar estratègies per a ser més ràpid en els teus càlculs quan no puguis utilitzar la calculadora, ni llapis ni paper. Treballarem estratègies de càlcul per a les següents operacions aritmètiques: suma, resta, multiplicació, divisió, arrels i potències.

1. La suma

Per a tenir agilitat en el càlcul mental d'aquesta operació, és important recordar que la suma (o addició) té les propietats commutativa i associativa, recordes de què es tractaven aquestes propietats? No et preocupis, farem un repàs molt breu:



- **Propietat commutativa:** quan canviem l'ordre dels sumands el resultat no varia.

Exemple: $7 + 21 = 28$ i $21 + 7 = 28$

Per a calcular mentalment una suma, és més senzill si sumem el nombre més gran amb el nombre més petit que a l'inrevés. Gràcies a aquesta propietat, el resultat que obtindrem serà el mateix.

- **Propietat associativa:** quan sumem tres o més sumands, el resultat sempre és el mateix independentment de com els agrupem.

Exemple: $2 + 4 + 6 = (2 + 4) + 6 = 6 + 6 = 12$
 $2 + 4 + 6 = 2 + (4 + 6) = 2 + 10 = 12$

Sense llapis ni paper.

Elaboració de material didàctic per a afavorir el càlcul mental a l'ESO.

Bé, ara ja saps de què parlem. A continuació treballarem **sis estratègies diferents**, que es basen en aquestes dues propietats que acabem d'enunciar, per a què puguis fer sumes mentalment més ràpid.

1. Descomposició de nombres d'una xifra buscant el 10

Completa la taula següent de forma que totes les cel·les sumin 10:

1 + 9	2 + 8	3 + 7	4 + 6	5 + 5
-------	-------	-------	-------	-------

Quan hakis de sumar nombres d'una xifra, pots descomposar-los i agrupar-los de forma que sumin 10 ja que, gràcies a la propietat associativa de la suma, obtindràs el mateix resultat que si fessis la suma original. Fixa't:

$$8 + 7 = 8 + 2 + 5 = (8 + 2) + 5 = 10 + 5 = 15$$

$$9 + 4 = 9 + 1 + 3 = (9 + 1) + 3 = 10 + 3 = 13$$

$$7 + 5 = 7 + 3 + 2 = (7 + 3) + 2 = 10 + 2 = 12$$

1. Tal com has vist als exemples, descomposa els sumands d'aquestes sumes de forma que a l'agrupar-los, un dels sumands sigui 10:

- a) $7 + 9 = 16$
- b) $5 + 8 = 13$
- c) $6 + 9 = 15$
- d) $8 + 7 = 15$
- e) $3 + 8 = 11$
- f) $4 + 9 = 13$
- g) $6 + 8 = 14$
- h) $7 + 4 = 11$
- i) $9 + 7 = 16$
- j) $5 + 9 = 14$

2. Ara, calcula mentalment les següents sumes (escriu només el resultat). Per fer-ho, ajuda't agrupant primer els nombres que sumen 10:

- a) $9 + 4 + 5 + 1 + 6 = 25$
- b) $7 + 6 + 8 + 3 + 2 = 26$
- c) $1 + 7 + 3 + 5 + 9 = 25$
- d) $8 + 3 + 5 + 6 + 5 = 27$
- e) $8 + 6 + 2 + 2 + 4 = 22$
- f) $3 + 1 + 8 + 6 + 3 = 21$
- g) $7 + 2 + 9 + 1 + 8 = 27$
- h) $4 + 9 + 3 + 5 + 2 = 23$
- i) $3 + 5 + 8 + 4 + 1 = 21$
- j) $6 + 7 + 2 + 9 + 2 = 26$

3. Fixa't que no només podem separar sumands en d'altres més fàcils de sumar intentant que sumin 10 sinó també intentant que la seva suma acabi en zero. Per exemple:

$$77 + 148 = 70 + 7 + 140 + 8 = (70 + 140) + (5 + 3) + 7 = 210 + (3 + 7) + 5 = 225$$

Calcula les sumes següents descomposant-les prèviament:

- a) $83 + 128 = 80 + 3 + 120 + 8 = (80 + 120) + (3 + 8) = 211$
- b) $241 + 79 = 240 + 1 + 70 + 9 = (240 + 70) + (1 + 9) = 320$
- c) $364 + 93 = 360 + 4 + 90 + 3 = (360 + 90) + (4 + 3) = 457$
- d) $876 + 45 = 870 + 6 + 40 + 5 = (870 + 40) + (6 + 5) = 921$
- e) $465 + 23 = 460 + 5 + 20 + 3 = (460 + 20) + (5 + 3) = 488$
- f) $677 + 36 = 670 + 7 + 30 + 6 = (670 + 30) + (7 + 6) = 713$

2. Sumar d'esquerra a dreta

Per a sumar nombres a partir d'una xifra, és més fàcil si sumem les centenes amb les centenes, les desenes amb les desenes i les unitats amb les unitats. Fixa't:

$$123 + 42 + 14 = \underline{100} + \underline{20} + \underline{40} + \underline{10} + \underline{3} + \underline{2} + \underline{4} = 100 + 70 + 9 = 179$$

4. Descomposa les sumes següents en unitats, desenes i centenes segons correspongui i fes el càlcul sense utilitzar la calculadora:

- g) $136 + 81 + 22 = 100 + 130 + 9 = 239$
- h) $25 + 93 + 272 = 200 + 180 + 10 = 390$
- i) $428 + 65 + 132 = 500 + 110 + 15 = 625$
- j) $337 + 46 + 82 = 300 + 150 + 15 = 465$
- k) $181 + 53 + 275 = 300 + 200 + 9 = 509$
- l) $117 + 23 + 41 = 100 + 70 + 11 = 181$
- m) $651 + 178 = 700 + 120 + 9 = 829$
- n) $82 + 63 + 114 = 100 + 150 + 9 = 259$
- o) $79 + 236 + 55 = 200 + 150 + 20 = 370$
- p) $431 + 125 + 12 = 500 + 60 + 8 = 568$
- q) $253 + 102 + 84 = 300 + 130 + 9 = 439$
- r) $56 + 33 + 12 = 90 + 11 = 101$
- s) $67 + 144 + 31 = 100 + 130 + 12 = 242$
- t) $172 + 25 + 18 = 100 + 100 + 15 = 215$
- u) $86 + 122 + 43 = 100 + 140 + 11 = 251$
- v) $206 + 383 = 500 + 80 + 9 = 589$
- w) $563 + 32 + 114 = 600 + 100 + 9 = 709$

3.Descomposició de la desena més propera

Quina de les dues sumes trobes més fàcil: A o B?

A: $8 + 7 =$

B: $10 + 5 =$

Com hem vist, sumar 10 (o qualsevol altra desena) a un nombre és senzill. Per això, per a sumar mentalment un nombre pròxim a una desena exacta cal que aproximis el nombre a aquesta desena descomposant i agrupant sumands. Com per exemple:

a) Com que 36 és proper a 40, descomposem l'altre sumand (el 5) de forma que puguem tenir el 40 com a sumand:

$$36 + 5 = 36 + 4 + 1 = (36 + 4) + 1 = 40 + 1 = 41$$

b) Com que 77 és proper a 80, descomposem l'altre sumand (el 16) de forma que puguem tenir el 80 com a sumand:

$$77 + 16 = 77 + 3 + 13 = (77 + 3) + 13 = 80 + 13 = 93$$

5. Realitza aquestes sumes mentalment aplicant l'estratègia de descomposició de la desena més propera i anota el resultat:

a) $86 + 15 = 90 + 14 = 104$

b) $37 + 9 = 40 + 6 = 46$

c) $45 + 12 = 50 + 7 = 57$

d) $69 + 6 = 70 + 5 = 75$

e) $46 + 7 = 50 + 3 = 53$

f) $55 + 9 = 60 + 4 = 64$

g) $95 + 7 = 100 + 2 = 102$

h) $26 + 8 = 30 + 4 = 34$

i) $96 + 5 = 100 + 1 = 101$

j) $38 + 5 = 40 + 3 = 43$

k) $97 + 5 = 100 + 2 = 102$

l) $85 + 8 = 90 + 3 = 93$

m) $67 + 4 = 70 + 1 = 71$

n) $28 + 7 = 30 + 5 = 35$

o) $39 + 4 = 40 + 3 = 43$

p) $38 + 9 = 40 + 7 = 47$

q) $68 + 3 = 70 + 1 = 71$

r) $77 + 6 = 80 + 3 = 83$

s) $96 + 11 = 100 + 7 = 107$

t) $37 + 7 = 40 + 4 = 44$

4. Sumar 9: una desena més, una unitat menys

Quan sumem 9 unitats a un nombre, és fàcil fer-ho si afegim 10 i restem 1 (una desena més, una unitat menys). Veiem un exemple:

Com que $9 = 10 - 1$, per a sumar 9 unitats a un nombre farem el següent:

$$16 + 9 = \longrightarrow 16 + 10 = 26; 26 - 1 = 25$$

O, equivalentment:

$$\begin{array}{c} -1 \\ \downarrow \\ 16 + 9 = 25 \\ \uparrow \\ +1 \end{array}$$

6. Calcula mentalment les operacions següents seguint aquesta estratègia i escriu-ne el resultat:

a) $24 + 9 = 23 + 10 = 33$

b) $25 + 9 = 24 + 10 = 34$

c) $26 + 9 = 25 + 10 = 35$

d) $17 + 9 = 16 + 10 = 26$

e) $23 + 9 = 22 + 10 = 32$

f) $34 + 9 = 33 + 10 = 43$

g) $19 + 9 = 18 + 10 = 28$

h) $36 + 9 = 35 + 10 = 45$

i) $45 + 9 = 44 + 10 = 54$

j) $17 + 9 = 16 + 10 = 26$

k) $19 + 9 = 18 + 10 = 28$

l) $18 + 9 = 17 + 10 = 27$

m) $76 + 9 = 75 + 10 = 85$

n) $11 + 9 = 10 + 10 = 20$

o) $63 + 9 = 62 + 10 = 72$

p) $33 + 9 = 32 + 10 = 42$

q) $38 + 9 = 37 + 10 = 47$

r) $77 + 9 = 76 + 10 = 86$

s) $84 + 9 = 83 + 10 = 93$

t) $78 + 9 = 77 + 10 = 87$

u) $22 + 9 = 21 + 10 = 31$

v) $93 + 9 = 92 + 10 = 102$

w) $57 + 9 = 56 + 10 = 66$

x) $46 + 9 = 45 + 10 = 55$

y) $87 + 9 = 86 + 10 = 96$

z) $64 + 9 = 63 + 10 = 73$

Fixa't que pots aplicar una estratègia de càlcul mental similar a la de sumar 9 per a qualsevol sumand que sigui proper a una desena exacta, com ara 19, 29, 39,... 11, 21, 31,... inclòs altres nombres no tan propers com el 8, 18, 28,... i 12, 22,...

7. Amb l'ajut de la calculadora, si és necessari, determina una tècnica fàcil de càlcul per a realitzar sumes quan un dels sumands sigui 11 i descriu-la a continuació posant exemples.

Qualsevol tècnica vàlida proposada pels alumnes serà correcta. Per exemple, sumar una unitat a la xifra de les unitats i les desenes del nombre o afegir una desena i després una unitat al nombre. *Exemples:* $32 + 11 = 43$ i $59 + 11 = 70$.

Ara, aplica aquesta tècnica per a calcular mentalment les sumes següents:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $76 + 11 = 77 + 10 = 87$ | q) $338 + 11 = 339 + 10 = 349$ |
| b) $21 + 11 = 22 + 10 = 32$ | r) $79 + 11 = 80 + 10 = 90$ |
| c) $112 + 11 = 113 + 10 = 123$ | s) $246 + 11 = 247 + 10 = 257$ |
| d) $475 + 11 = 476 + 10 = 486$ | t) $82 + 11 = 83 + 10 = 93$ |
| e) $46 + 11 = 47 + 10 = 57$ | u) $322 + 11 = 323 + 10 = 333$ |
| f) $364 + 11 = 365 + 10 = 375$ | v) $136 + 11 = 137 + 10 = 147$ |
| g) $87 + 11 = 88 + 10 = 98$ | w) $74 + 11 = 75 + 10 = 85$ |
| h) $64 + 11 = 65 + 10 = 75$ | x) $48 + 11 = 49 + 10 = 59$ |
| i) $523 + 11 = 524 + 10 = 534$ | y) $172 + 11 = 173 + 10 = 183$ |
| j) $178 + 11 = 179 + 10 = 189$ | z) $407 + 11 = 408 + 10 = 418$ |
| k) $84 + 11 = 85 + 10 = 95$ | a) $37 + 11 = 38 + 10 = 48$ |
| l) $18 + 11 = 19 + 10 = 29$ | b) $225 + 11 = 226 + 10 = 236$ |
| m) $66 + 11 = 67 + 10 = 77$ | c) $47 + 11 = 48 + 10 = 58$ |
| n) $15 + 11 = 16 + 10 = 26$ | d) $684 + 11 = 685 + 10 = 695$ |
| o) $691 + 11 = 692 + 10 = 702$ | e) $126 + 11 = 127 + 10 = 137$ |
| p) $54 + 11 = 55 + 10 = 65$ | f) $63 + 11 = 64 + 10 = 74$ |

8. De la mateixa forma que hem vist per a sumar 9 unitats, en el cas que vulguem sumar-ne 8 també podem fer-ho seguint una estratègia, pensa-hi i escriu com ho faries afegint algun exemple:

Una possibilitat que podem oferir als alumnes pot ser sumar 10 al nombre i després restar-ne 2 unitats. Us convidem a formular la pregunta al grup-classe per a observar la diversitat d'estratègies que poden proposar.

Ara, aplica aquesta tècnica per a calcular mentalment les sumes següents:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $73 + 8 = 71 + 10 = 81$ | n) $53 + 8 = 51 + 10 = 61$ |
| b) $211 + 8 = 209 + 10 = 219$ | o) $69 + 8 = 67 + 10 = 77$ |
| c) $83 + 8 = 81 + 10 = 91$ | p) $155 + 8 = 153 + 10 = 163$ |
| d) $475 + 8 = 473 + 10 = 483$ | q) $33 + 8 = 31 + 10 = 41$ |
| e) $16 + 8 = 14 + 10 = 24$ | r) $19 + 8 = 17 + 10 = 27$ |
| f) $124 + 8 = 122 + 10 = 132$ | s) $206 + 8 = 204 + 10 = 214$ |
| g) $37 + 8 = 35 + 10 = 45$ | t) $82 + 8 = 80 + 10 = 90$ |
| h) $44 + 8 = 42 + 10 = 52$ | u) $212 + 8 = 210 + 10 = 220$ |
| i) $38 + 8 = 36 + 10 = 46$ | v) $13 + 8 = 11 + 10 = 21$ |
| j) $106 + 8 = 104 + 10 = 114$ | w) $223 + 8 = 221 + 10 = 231$ |
| k) $84 + 8 = 82 + 10 = 92$ | x) $77 + 8 = 75 + 10 = 85$ |
| l) $27 + 8 = 25 + 10 = 35$ | y) $146 + 8 = 144 + 10 = 154$ |
| m) $66 + 8 = 64 + 10 = 74$ | z) $79 + 8 = 77 + 10 = 87$ |

9. I si el què volem és sumar 12 unitats? Pensa i escriu una estratègia útil per a sumar mentalment 12 unitats a un nombre i posa'n exemples.

Una possibilitat, per a sumar 12 unitats a un nombre, pot ser sumar 1 desena i després afegir-ne 2 unitats. De nou us convidem a formular la pregunta al grup-classe per a observar la diversitat d'estratègies que poden proposar

Exemple: $37 + 12 = (37 + 10) + 2 = 47 + 2 = 49$

Ara, aplica aquesta tècnica per a calcular mentalment les sumes següents:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) $73 + 12 = 85$ | n) $53 + 12 = 65$ |
| b) $211 + 12 = 223$ | o) $69 + 12 = 81$ |
| c) $123 + 12 = 135$ | p) $155 + 12 = 167$ |
| d) $475 + 12 = 487$ | q) $33 + 12 = 45$ |
| e) $16 + 12 = 28$ | r) $19 + 12 = 31$ |
| f) $124 + 12 = 136$ | s) $206 + 12 = 218$ |
| g) $37 + 12 = 49$ | t) $122 + 12 = 134$ |
| h) $44 + 12 = 56$ | u) $211 + 12 = 223$ |
| i) $312 + 12 = 324$ | v) $13 + 12 = 25$ |
| j) $106 + 12 = 118$ | w) $223 + 12 = 235$ |
| k) $124 + 12 = 136$ | x) $77 + 12 = 89$ |
| l) $27 + 12 = 39$ | y) $146 + 12 = 148$ |
| m) $66 + 12 = 78$ | z) $79 + 12 = 91$ |

10. També pots utilitzar estratègies similars a aquestes per a sumar 190, 180, 170... a un nombre.

a) Pensa i escriu una estratègia útil per a sumar mentalment 190 unitats a un nombre i posa'n exemples.

Una possibilitat pot ser sumar-ne 200 unitats i després restar-ne 10 al resultat.
Exemple: $175 + 190 = (175 + 200) - 10 = 375 - 10 = 365$.

b) I si enlloc de 190 volguessis sumar 180 unitats, escriu com variaria aquesta estratègia.

Podríem emprar l'estratègia anterior però, aquesta vegada, restant-ne 20 unitats al resultat.

c) Compara oralment aquestes estratègies amb les proposades per un company.

11. Calcula mentalment les següents sumes, preferiblement aplicant alguna de les estratègies que hem treballat o que tu mateix has deduït, i escriu-ne el resultat:

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| a.1) $356 + 18 = 374$ | a.2) $317 + 170 = 487$ |
| b.1) $648 + 19 = 667$ | b.2) $75 + 180 = 255$ |
| c.1) $754 + 21 = 775$ | c.2) $484 + 190 = 674$ |
| d.1) $552 + 41 = 593$ | d.2) $99 + 380 = 479$ |
| e.1) $214 + 17 = 231$ | e.2) $75 + 190 = 265$ |
| f.1) $106 + 19 = 125$ | f.2) $633 + 180 = 813$ |
| g.1) $266 + 18 = 284$ | g.2) $124 + 470 = 594$ |
| h.1) $179 + 21 = 200$ | h.2) $62 + 170 = 232$ |
| i.1) $560 + 31 = 591$ | i.2) $98 + 110 = 208$ |
| j.1) $99 + 41 = 140$ | j.2) $167 + 210 = 377$ |
| k.1) $114 + 51 = 165$ | k.2) $692 + 310 = 1.002$ |
| l.1) $87 + 18 = 105$ | l.2) $881 + 210 = 1.091$ |
| m.1) $134 + 19 = 153$ | m.2) $75 + 21 = 96$ |
| n.1) $472 + 17 = 489$ | n.2) $83 + 190 = 273$ |
| o.1) $278 + 81 = 359$ | |
| p.1) $65 + 71 = 136$ | |
| q.1) $97 + 61 = 158$ | |
| r.1) $321 + 19 = 340$ | |
| s.1) $243 + 28 = 271$ | |
| t.1) $261 + 180 = 441$ | |
| u.1) $123 + 190 = 313$ | |
| v.1) $236 + 170 = 406$ | |
| w.1) $174 + 280 = 454$ | |
| x.1) $339 + 190 = 529$ | |
| y.1) $512 + 290 = 802$ | |
| z.1) $109 + 380 = 489$ | |



5.El nombre misteriós

Per a sumar dos nombres quasi consecutius, com per exemple 7 i 9, existeix una tècnica molt útil que consisteix a doblar el que s'anomena **nombre misteriós**.

Resol les sumes següents amb ajut de la calculadora i dedueix de quin nombre misteriós estem parlant:

$$\begin{array}{lll} 7 + 9 = 8 + 8 = 16 & 3 + 5 = 4 + 4 = 8 & 9 + 11 = 10 + 10 = 20 \\ 6 + 8 = 7 + 7 = 14 & 5 + 7 = 6 + 6 = 12 & 1 + 3 = 2 + 2 = 4 \end{array}$$

12. T'atreveixes a calcular mentalment aquestes sumes doblant el seu nombre misteriós? Doncs endavant:

- a) $19 + 21 = 20 + 20 = 40$
- b) $6 + 4 = 5 + 5 = 10$
- c) $57 + 59 = 58 + 58 = 116$
- d) $11 + 13 = 12 + 12 = 24$
- e) $9 + 7 = 8 + 8 = 16$
- f) $12 + 14 = 13 + 13 = 26$
- g) $21 + 23 = 22 + 22 = 44$
- h) $16 + 18 = 17 + 17 = 34$
- i) $31 + 33 = 32 + 32 = 64$
- j) $55 + 57 = 56 + 56 = 112$
- k) $65 + 67 = 66 + 66 = 132$
- l) $17 + 15 = 16 + 16 = 32$
- m) $24 + 26 = 25 + 25 = 50$
- n) $107 + 109 = 108 + 108 = 216$
- o) $29 + 27 = 28 + 28 = 56$

6.Sumar el mateix nombre

Completa:

$1 + 1 = 2$	$6 + 6 = 12$	$11 + 11 = 22$	$16 + 16 = 32$
$2 + 2 = 4$	$7 + 7 = 14$	$12 + 12 = 24$	$17 + 17 = 34$
$3 + 3 = 6$	$8 + 8 = 16$	$13 + 13 = 26$	$18 + 18 = 36$
$4 + 4 = 8$	$9 + 9 = 18$	$14 + 14 = 28$	$19 + 19 = 38$
$5 + 5 = 10$	$10 + 10 = 20$	$15 + 15 = 30$	$20 + 20 = 40$

Et recomanem memoritzar aquesta taula de dobles de nombres petits perquè t'ajudarà a ser més àgil en els teus càlculs.

Fixa't que sumar a un nombre el mateix nombre és el mateix que multiplicar aquest nombre per **dos**. Per exemple, $23 + 23 = 23 \cdot 2 = 46$.

13. Calcula mentalment i escriu el resultat de les següents sumes:

- a) $17 + 17 = 34$
- b) $63 + 63 = 126$
- c) $45 + 45 = 90$
- d) $31 + 31 = 62$
- e) $27 + 27 = 54$
- f) $16 + 16 = 32$
- g) $54 + 54 = 108$
- h) $21 + 21 = 42$
- i) $34 + 34 = 68$
- j) $65 + 65 = 130$
- k) $73 + 73 = 146$
- l) $84 + 84 = 168$
- m) $52 + 52 = 104$
- n) $18 + 18 = 36$
- o) $26 + 26 = 52$
- p) $32 + 32 = 64$
- q) $64 + 64 = 128$
- r) $85 + 85 = 170$

7. Sumar nombres consecutius

Dedueix tu mateix l'estratègia de càlcul per a sumar dos nombres consecutius pensant en el doble del més petit i reescriuint les següents sumes:

$$\begin{array}{ll} 7 + 8 = 7 + 7 + 1 = 15 & 3 + 4 = 3 + 3 + 1 = 7 \\ 5 + 6 = 5 + 5 + 1 = 11 & 6 + 7 = 6 + 6 + 1 = 13 \end{array}$$

Escriu l'estratègia que hagi deduït:

Per a sumar dos nombres consecutius podem sumar una unitat a la suma doble del sumand més petit.

14. Calcula mentalment i escriu el resultat de les següents sumes:

a) $17 + 18 = 35$	g) $54 + 55 = 109$	m) $52 + 53 = 55$
b) $63 + 64 = 127$	h) $21 + 22 = 43$	n) $18 + 19 = 37$
c) $45 + 46 = 91$	i) $34 + 35 = 69$	o) $26 + 27 = 53$
d) $31 + 32 = 63$	j) $65 + 66 = 131$	p) $32 + 33 = 65$
e) $27 + 28 = 55$	k) $73 + 74 = 147$	q) $64 + 65 = 129$
f) $16 + 17 = 33$	l) $84 + 85 = 169$	r) $85 + 86 = 171$

2. La resta

La resta, subtracció o diferència, és una operació que va de la mà de la suma, de fet, és la operació inversa. No obstant, hem de tenir present que aquesta operació no satisfà les propietats de la suma:

- **La resta no té la propietat commutativa**, i per tant, no podem intercanviar la posició del minuend amb la del subtrahend.
Exemple: $6 - 4$ no és el mateix que $4 - 6$, ja que $6 - 4 = 2$ i $4 - 6 = -2$.



- **Tampoc té la propietat associativa:** Al no poder intercanviar el valor del minuend amb el subtrahend, no podem associar de cap forma els valors d'una resta.

Malgrat la resta no satisfaci cap d'aquestes propietats, també podem deduir estratègies que ens ajudin a fer restes mentalment de forma ràpida.

1. Ús de la prova de la resta

Per a restar dos nombres petits, és més simple si utilitzem la prova de la resta per a trobar el resultat. És a dir, comptar les unitats que li falten al subtrahend per arribar al minuend.

Escriu la prova de les restes següents:

$9 - 7 =$	\longrightarrow	$7 + 2 = 9$
$8 - 5 =$	\longrightarrow	$5 + 3 = 8$
$6 - 3 =$	\longrightarrow	$3 + 3 = 6$
$7 - 4 =$	\longrightarrow	$4 + 3 = 7$
$9 - 5 =$	\longrightarrow	$5 + 4 = 9$

Fixa't que, d'aquesta manera, enlloc de pensar en una resta estarem pensant en una suma.

15. Calcula mentalment les restes que et proposem utilitzant la prova de la resta:

a) $12 - 9 = 3$	f) $24 - 19 = 5$	k) $22 - 14 = 8$
b) $20 - 17 = 3$	g) $33 - 27 = 6$	l) $18 - 11 = 7$
c) $21 - 19 = 2$	h) $41 - 38 = 3$	m) $13 - 7 = 6$
d) $17 - 13 = 4$	i) $8 - 2 = 6$	n) $29 - 24 = 5$
e) $15 - 8 = 7$	j) $16 - 7 = 9$	o) $79 - 73 = 6$

Sense llapis ni paper.

Elaboració de material didàctic per a afavorir el càlcul mental a l'ESO.

2. Restar d'esquerra a dreta

Quan les xifres del minuend són més grans que les corresponents del subtrahend, restar d'esquerra a dreta pot ser molt senzill. Per exemple:

$$365 - 242 = \underline{300} - \underline{200} + \underline{60} - \underline{40} + \underline{5} - \underline{2} = 100 + 20 + 3 = 123$$

Hem restat les centenes amb les **centenes**, les desenes amb les **desenes** i les unitats amb les **unitats**, convertint la resta en una suma de restes més fàcils de resoldre.

16. Calcula mentalment restant d'esquerra a dreta, i anota el resultat:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a) $756 - 232 = 524$ | j) $292 - 140 = 152$ |
| b) $898 - 541 = 357$ | k) $418 - 401 = 17$ |
| c) $917 - 224 = 693$ | l) $173 - 92 = 81$ |
| d) $366 - 234 = 132$ | m) $239 - 114 = 125$ |
| e) $248 - 153 = 95$ | n) $979 - 966 = 13$ |
| f) $128 - 110 = 18$ | o) $564 - 431 = 133$ |
| g) $877 - 717 = 160$ | p) $652 - 551 = 101$ |
| h) $986 - 845 = 141$ | q) $780 - 540 = 240$ |
| i) $755 - 643 = 112$ | r) $465 - 332 = 133$ |



3. Restar un nombre a la unitat seguida de zeros

Suposem que volguéssim fer la resta $10.000 - 4.375$, aleshores completa el següent:

milers:	$9 - 4 = 5$	} Obtenim que $10.000 - 4.375 = 5.625$
centenes:	$9 - 3 = 6$	
desenes:	$9 - 7 = 2$	
unitats:	$10 - 5 = 5$	

Dedueix i escriu l'estratègia que hem usat:

S'ha efectuat la resta de cada xifra a 9, excepte en el cas de les unitats, que ho hem restat de la desena.

17. Calcula mentalment aquestes restes i anota el resultat:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $100 - 45 = 55$ | j) $1.000 - 442 = 558$ |
| b) $1.000 - 235 = 765$ | k) $10.000 - 4.581 = 5.419$ |
| c) $10.000 - 3.495 = 6.505$ | l) $100 - 92 = 8$ |
| d) $100.000 - 23.467 = 76.533$ | m) $100 - 54 = 46$ |
| e) $1.000 - 653 = 347$ | n) $1.000 - 976 = 24$ |
| f) $10.000 - 9.710 = 290$ | o) $10.000 - 4.933 = 5.067$ |
| g) $100 - 71 = 29$ | p) $1.000 - 558 = 442$ |
| h) $1.000 - 984 = 16$ | q) $100.000 - 46.547 = 53.453$ |
| i) $1.000 - 463 = 537$ | r) $10.000 - 2.332 = 7.668$ |

4. Restar 9: una desena menys, una unitat més

Per a restar 9 unitats, és millor restar 10 i sumar-ne 1 unitat, ja que $-9 = -10 + 1$.

Per exemple,

$$15 - 9 = \longrightarrow 15 - 10 = 5; 5 + 1 = 6$$

18. Calcula mentalment i anota el resultat:

a) $24 - 9 = 15$

b) $25 - 9 = 16$

c) $26 - 9 = 17$

d) $17 - 9 = 8$

e) $23 - 9 = 14$

f) $34 - 9 = 25$

g) $19 - 9 = 10$

h) $36 - 9 = 25$

i) $45 - 9 = 36$

j) $28 - 9 = 19$

k) $15 - 9 = 6$

l) $18 - 9 = 9$

m) $72 - 9 = 63$

n) $43 - 9 = 36$

o) $63 - 9 = 54$

p) $33 - 9 = 24$

q) $38 - 9 = 39$

r) $77 - 9 = 68$

De forma anàloga a la suma, també pots aplicar aquesta estratègia de càlcul mental per a qualsevol subtrahend proper a una desena exacta, com ara 19, 29, 39,... 11, 21, 31,... inclòs altres nombres no tan propers com el 8, 18, 28,... i 12, 22,...

19. Ara, de forma anàloga a la què hem vist per a restar 9 unitats, determina una tècnica fàcil per a restar 11 unitats a un nombre de dues xifres. Si és necessari, ajuda't de la calculadora.

L'estratègia que proposem consisteix a restar una desena al nombre i restar després una unitat al resultat.

A continuació calcula mentalment les operacions que et proposem aplicant aquesta tècnica i escriu-ne el resultat:

a) $76 - 11 = 65$

b) $21 - 11 = 10$

c) $112 - 11 = 101$

d) $475 - 11 = 464$

e) $46 - 11 = 35$

f) $364 - 11 = 353$

g) $87 - 11 = 76$

h) $64 - 11 = 53$

i) $523 - 11 = 512$

j) $178 - 11 = 167$

k) $84 - 11 = 73$

l) $18 - 11 = 7$

m) $66 - 11 = 55$

n) $15 - 11 = 4$

o) $691 - 11 = 680$

p) $54 - 11 = 43$

q) $338 - 11 = 327$

r) $79 - 11 = 68$

20. a) Utilitzant una estratègia similar, calcula mentalment les restes que et proposem a continuació amb subtrahend igual a 8.

a) $73 - 8 = 65$

b) $211 - 8 = 203$

c) $83 - 8 = 75$

d) $475 - 8 = 467$

e) $16 - 8 = 8$

f) $124 - 8 = 116$

g) $37 - 8 = 29$

h) $44 - 8 = 36$

i) $38 - 8 = 30$

j) $106 - 8 = 98$

k) $84 - 8 = 76$

l) $27 - 8 = 19$

m) $66 - 8 = 58$

n) $53 - 8 = 45$

o) $69 - 8 = 61$

p) $155 - 8 = 147$

q) $33 - 8 = 25$

r) $19 - 8 = 11$

b) Escriu l'estratègia que has fet servir per a resoldre les restes de l'apartat anterior i posa un parell d'exemples.

Una possible estratègia pot consistir en restar una desena al nombre i després sumar 2 unitats al resultat. Exemples: $74 - 8 = (74 - 10) + 2 = 64 + 2 = 66$ o bé $25 - 8 = (25 - 10) + 2 = 15 + 2 = 17$.

21. a) Utilitzant una estratègia similar, calcula mentalment les restes que et proposem a continuació amb subtrahend igual a 12.

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) $73 - 12 = 61$ | j) $106 - 12 = 94$ |
| b) $211 - 12 = 199$ | k) $134 - 12 = 122$ |
| c) $123 - 12 = 111$ | l) $27 - 12 = 15$ |
| d) $475 - 12 = 463$ | m) $66 - 12 = 54$ |
| e) $16 - 12 = 4$ | n) $53 - 12 = 41$ |
| f) $124 - 12 = 112$ | o) $69 - 12 = 57$ |
| g) $37 - 12 = 25$ | p) $155 - 12 = 143$ |
| h) $44 - 12 = 32$ | q) $33 - 12 = 21$ |
| i) $312 - 12 = 300$ | r) $19 - 12 = 7$ |

b) Escriu l'estratègia que has fet servir per a resoldre les restes de l'apartat anterior i posa un parell d'exemples.

L'estratègia que proposem consisteix a restar una desena al nombre i restar després dues unitats al resultat. *Exemples:* $84 - 12 = (84 - 10) - 2 = 74 - 2 = 72$ o bé $25 - 12 = (25 - 10) - 2 = 15 - 2 = 13$.

22. També pots utilitzar estratègies similars a aquestes per a restar 190, 180, 170... a un nombre.

a) Pensa i escriu una estratègia simple per a restar 190 unitats a un nombre i posa'n exemples.

Una possible estratègia pot ser restar-ne 200 unitats al nombre i després sumar-ne 10 al resultat. *Exemple:* $275 - 190 = (275 - 200) + 10 = 75 + 10 = 85$.

b) I si enlloc de 190 volguessis restar 210 unitats? Escriu quina estratègia utilitzaries i posa'n exemples.

Podríem emprar l'estratègia anterior però, aquesta vegada, restant-ne 10 unitats al resultat de la primera diferència. *Exemple:* $275 - 210 = (275 - 200) - 10 = 75 - 10 = 65$.

23. Calcula mentalment les següents restes, preferiblement aplicant alguna de les estratègies que hem treballat o que tu mateix has deduït, i escriu-ne el resultat.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a.1) $356 - 18 = 338$ | y.1) $512 - 290 = 212$ |
| b.1) $648 - 19 = 629$ | z.1) $509 - 380 = 129$ |
| c.1) $754 - 21 = 733$ | a.2) $317 - 170 = 147$ |
| d.1) $552 - 41 = 511$ | b.2) $275 - 180 = 95$ |
| e.1) $214 - 17 = 197$ | c.2) $484 - 190 = 294$ |
| f.1) $106 - 11 = 95$ | d.2) $999 - 380 = 619$ |
| g.1) $266 - 21 = 245$ | e.2) $735 - 190 = 645$ |
| h.1) $179 - 21 = 158$ | f.2) $633 - 180 = 453$ |
| i.1) $560 - 31 = 529$ | g.2) $724 - 470 = 254$ |
| j.1) $99 - 41 = 58$ | h.2) $962 - 170 = 792$ |
| k.1) $114 - 51 = 63$ | i.2) $908 - 110 = 798$ |
| l.1) $87 - 18 = 69$ | j.2) $267 - 210 = 57$ |
| m.1) $134 - 19 = 115$ | k.2) $692 - 310 = 382$ |
| n.1) $472 - 17 = 455$ | l.2) $881 - 210 = 671$ |
| o.1) $278 - 81 = 197$ | m.2) $748 - 290 = 458$ |
| p.1) $85 - 71 = 14$ | z.1) $959 - 380 = 579$ |
| q.1) $97 - 61 = 36$ | a.2) $612 - 170 = 442$ |
| r.1) $321 - 19 = 302$ | b.2) $295 - 180 = 115$ |
| s.1) $243 - 28 = 215$ | c.2) $594 - 190 = 404$ |
| t.1) $261 - 180 = 81$ | d.2) $677 - 210 = 467$ |
| u.1) $323 - 190 = 133$ | e.2) $854 - 420 = 434$ |
| v.1) $236 - 170 = 66$ | f.2) $388 - 180 = 208$ |
| w.1) $674 - 280 = 394$ | g.2) $995 - 190 = 805$ |
| x.1) $339 - 190 = 149$ | h.2) $662 - 110 = 552$ |

3.El producte

La següent és una taula de multiplicacions o productes que s'anomena **Taula Pitagòrica**, la coneixes? Es diu d'aquesta manera perquè la va inventar el matemàtic i filòsof Pitàgores a Grècia fa més de 2.500 anys.



Fixa't que, per a completar-la, s'ha d'escriure a cada cel·la el producte del nombre de la seva fila pel de la seva columna. Per exemple, observa que per a localitzar el resultat de $4 \cdot 3$ és necessari continuar la fila 4 i la columna 3 fins arribar a la intersecció.

Figura 1. Retrat del matemàtic Pitàgores.

Completa-la, com va fer Pitàgores, anotant el resultat dels productes corresponents en cada cas:

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Sense llapis ni paper.

Elaboració de material didàctic per a afavorir el càlcul mental a l'ESO.

Com deus haver observat, la taula que acabes de completar conté totes les taules de multiplicar dels 10 primers nombres naturals. És imprescindible que per a calcular mentalment productes, divisions i potències la memoritzis prèviament.

24. Respon:

- a) Troba a la taula el resultat de $7 \cdot 8$ i el de $8 \cdot 7$.

(S'han encerclat a la taula)

- b) Són iguals o diferents els dos resultats anteriors? Succeeix el mateix amb la resta de resultats? Pots relacionar-ho amb alguna propietat del producte? Si la resposta és afirmativa, digues amb quina propietat i explica el perquè.

Sí, són iguals. La taula Pitagòrica és simètrica respecte a la diagonal que uneix l'1 i el 100, fet que posa de manifest la propietat commutativa del producte.

- c) Fixa't en la columna del 2, creus que a partir d'aquesta columna es pot obtenir alguna/es altra/es? Si la resposta és afirmativa, indica quina/es i com la/les obtindries.

A partir de la columna del 2, multiplicant per 2, 3, 4 i 5 respectivament, poden obtenir-se les columnes 4, 6, 8 i 10.

- d) Ara fixa't en la columna del 3, creus que a partir d'aquesta columna es pot obtenir alguna/es altra/es? Si la resposta és afirmativa, indica quina/es i com la/les obtindries.

A partir de la columna 3, multiplicant per 2 i 3 respectivament, poden obtenir-se les columnes 6 i 9.

- e) El quadrat d'un nombre a s'escriu a^2 i és el resultat de multiplicar un nombre per sí mateix. És a dir, $a^2 = a \cdot a$. Ubica a la taula Pitagòrica tots els quadrats que hi apareguin.

Els quadrats estan continguts a la diagonal que va de l'1 al 100 de la taula Pitagòrica.

25. a) Troba amb la calculadora el resultat d'aquests productes sense utilitzar la tecla de la multiplicació:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $23 \cdot 4 = 92$ | n) $54 \cdot 5 = 270$ |
| b) $11 \cdot 5 = 55$ | o) $76 \cdot 12 = 912$ |
| c) $13 \cdot 7 = 91$ | p) $51 \cdot 4 = 204$ |
| d) $125 \cdot 3 = 375$ | q) $43 \cdot 7 = 301$ |
| e) $17 \cdot 8 = 136$ | r) $29 \cdot 6 = 174$ |

b) Com ho has fet? Per què?

Cal que els alumnes sumin **diverses vegades** fins a obtenir el resultat dels productes.

El producte satisfà tres propietats que faciliten la resolució d'aquesta operació. Posar-les en pràctica ens serà de gran utilitat a l'hora de calcular productes mentalment:



- **Propietat commutativa:** quan canviem l'ordre dels factors el resultat no varia.

Exemple: $7 \cdot 3 = 21$ i $3 \cdot 7 = 21$

Aquesta propietat ens permetrà permutar els factors de forma que ens sigui més fàcil calcular el seu producte ja que el resultat que obtindrem serà el mateix.

- **Propietat associativa:** quan multipliquem tres o més factors, el resultat sempre és el mateix independentment de com els agrupem.

Exemple: $3 \cdot 5 \cdot 8 = (3 \cdot 5) \cdot 8 = 15 \cdot 8 = 120$

$3 \cdot 5 \cdot 8 = 3 \cdot (5 \cdot 8) = 3 \cdot 40 = 120$

- **Propietat distributiva del producte respecte la suma:** la suma de dos nombres multiplicats per un tercer equival a la suma de cada sumand multiplicats pel tercer nombre.

Exemple: $4 \cdot (6 + 3) = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 3$

A continuació treballarem algunes de les tècniques per a calcular mentalment productes de forma més ràpida.

1. Descomposició del factor més gran

Per multiplicar un nombre d'una xifra per un altre de dos o més, fem **la descomposició polinòmica del factor més gran** i apliquem la propietat distributiva.

Per exemple:

$$4 \cdot 52 = 4 \cdot (50 + 2) = 4 \cdot 50 + 4 \cdot 2 = 200 + 8 = 208$$

$$3 \cdot 94 = 3 \cdot (90 + 4) = 3 \cdot 90 + 3 \cdot 4 = 270 + 12 = 282$$

26. Aplica aquesta estratègia per a calcular els productes següents:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) $25 \cdot 3 = 75$ | k) $68 \cdot 9 = 702$ |
| b) $3 \cdot 85 = 255$ | l) $24 \cdot 6 = 144$ |
| c) $31 \cdot 4 = 124$ | m) $49 \cdot 3 = 147$ |
| d) $27 \cdot 6 = 162$ | n) $9 \cdot 54 = 486$ |
| e) $4 \cdot 15 = 60$ | o) $78 \cdot 3 = 234$ |
| f) $23 \cdot 9 = 207$ | p) $42 \cdot 8 = 336$ |
| g) $44 \cdot 3 = 132$ | q) $7 \cdot 91 = 637$ |
| h) $82 \cdot 7 = 574$ | r) $72 \cdot 5 = 360$ |
| i) $3 \cdot 67 = 201$ | s) $12 \cdot 9 = 108$ |
| j) $53 \cdot 4 = 212$ | t) $64 \cdot 8 = 512$ |

Sense llapis ni paper.

Elaboració de material didàctic per a afavorir el càlcul mental a l'ESO.

2. Multiplicar per la unitat seguida de zeros

T'has preguntat mai quin és el resultat de multiplicar cada nombre per 10? I per 100? I per 1.000? Quina és l'estratègia que podem seguir per a multiplicar fàcilment per 10, 100, 1.000... sense necessitat d'usar la calculadora? Per esbrinar-la, si vols, pots fer algunes proves amb la calculadora.

Escriu l'estratègia:

Per multiplicar **un nombre per la unitat seguida de zeros** hem de moure la coma del nombre cap a la dreta tantes posicions com zeros hi ha darrera la unitat. En cas de que no hi hagi prou xifres darrera la coma afegirem tants zeros com sigui necessari.

Exemples:

$$31 \cdot 100 = 3.100$$

$$56 \cdot 10 = 560$$

$$43,26 \cdot 1.000 = 43.260$$

$$83,72 \cdot 10 = 837,2$$

$$34,9 \cdot 100 = 3.490$$

27. Aplica l'estratègia que has deduït per a completar la taula següent:

	· 10	· 100	· 1.000	· 10.000	· 100.000
8,7	87	870	8.700	87.000	870.000
370	3.700	37.000	370.000	3.700.000	37.000.000
41,5	415	4.150	41.500	415.000	4.150.000
6,031	60,31	603,1	6.031	60.310	603.100
0,0008	0,008	0,08	0,8	8	80
9,2	92	920	9.200	92.000	920.000

Sense llapis ni paper.

Elaboració de material didàctic per a afavorir el càlcul mental a l'ESO.

2,14	21,4	214	2.140	21.400	214.000
506,244	5.062,44	50.624,4	506.244	5.062.440	50.624.400
3.007,613	30.076,13	300.761,3	3.007.613	30.076.130	300.761.300
96,003	960,03	9.600,3	96.003	960.030	9.600.300
9.703,58	97.035,8	970.358	9.703.580	97.035.800	970.358.000
299,1	2.991	29.910	299.100	2.991.000	29.910.000
31.625,75	316.257	3.162.5705	31.625.7000	316.257.0000	3.162.570.000
15.938	159.380	1.593.800	15.938.000	159.380.000	1.593.800.000
0,602	6,02	60,2	602	6.020	60.200

28. Quin és el resultat de fer aquests productes? Pots ajudar-te de la calculadora per a resoldre'ls.

$$31 \cdot 200 = 6.200$$

$$56 \cdot 80 = 4.480$$

$$43 \cdot 300 = 12.900$$

$$82 \cdot 70 = 5.740$$

$$27 \cdot 5.000 = 135.000$$

$$14 \cdot 60 = 840$$

$$73 \cdot 400 = 29.200$$

$$17 \cdot 3.000 = 51.000$$

a) Què tenen en comú tots aquests productes?

Un dels factors és múltiple de 10.

b) Quina és l'estratègia que podríem fer servir per a fer fàcilment aquestes multiplicacions sense necessitat d'utilitzar la calculadora?

Multiplicar els dos nombres i, al producte obtingut, moure-li la coma cap a la dreta tantes posicions com zeros tingui el nombre. En cas de que no hi hagi prou xifres darrera la coma afegirem tants zeros com sigui necessari.

29. Aplica l'estratègia que has deduït per a fer mentalment els productes següents:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $3 \cdot 80 = \mathbf{240}$ | j) $4 \cdot 70 = \mathbf{280}$ |
| b) $6 \cdot 40 = \mathbf{240}$ | k) $3 \cdot 70 = \mathbf{210}$ |
| c) $7 \cdot 90 = \mathbf{630}$ | l) $4 \cdot 90 = \mathbf{360}$ |
| d) $2 \cdot 70 = \mathbf{140}$ | m) $9 \cdot 80 = \mathbf{720}$ |
| e) $5 \cdot 90 = \mathbf{450}$ | n) $7 \cdot 50 = \mathbf{350}$ |
| f) $8 \cdot 30 = \mathbf{240}$ | o) $6 \cdot 50 = \mathbf{300}$ |
| g) $8 \cdot 60 = \mathbf{480}$ | p) $8 \cdot 80 = \mathbf{640}$ |
| h) $6 \cdot 30 = \mathbf{180}$ | q) $4 \cdot 30 = \mathbf{120}$ |
| i) $7 \cdot 20 = \mathbf{140}$ | r) $2 \cdot 400 = \mathbf{800}$ |

3. Multiplicar per 5

Observa com s'han resolt les següents multiplicacions per 5 i completa l'estratègia que s'ha portat a terme:

$$56 \cdot 5 = \longrightarrow 28 \cdot 10 = 280$$

$$13 \cdot 5 = \longrightarrow 6,5 \cdot 10 = 65$$

Per multiplicar **un nombre per 5** primer calcularem **la meitat** del nombre i després multiplicarem aquesta per **10**.

30. Calcula mentalment els següents productes i anota'n el resultat:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $22 \cdot 5 = \mathbf{110}$ | k) $68 \cdot 5 = \mathbf{340}$ |
| b) $34 \cdot 5 = \mathbf{170}$ | l) $27 \cdot 5 = \mathbf{135}$ |
| c) $38 \cdot 5 = \mathbf{190}$ | m) $48 \cdot 5 = \mathbf{240}$ |
| d) $26 \cdot 5 = \mathbf{130}$ | n) $92 \cdot 5 = \mathbf{460}$ |
| e) $58 \cdot 5 = \mathbf{290}$ | o) $78 \cdot 5 = \mathbf{390}$ |
| f) $24 \cdot 5 = \mathbf{120}$ | p) $84 \cdot 5 = \mathbf{420}$ |

$$g) 44 \cdot 5 = \mathbf{220}$$

$$h) 36 \cdot 5 = \mathbf{180}$$

$$i) 28 \cdot 5 = \mathbf{140}$$

$$j) 50 \cdot 5 = \mathbf{250}$$

$$q) 64 \cdot 5 = \mathbf{320}$$

$$r) 72 \cdot 5 = \mathbf{360}$$

$$s) 15 \cdot 5 = \mathbf{75}$$

$$t) 61 \cdot 5 = \mathbf{305}$$

4. Multiplicar per 9

Multiplicar **un nombre per 9** equival a multiplicar primer per **10** i restar després **el nombre** al resultat.

Completa els exemples:

$$78 \cdot 9 = 78 \cdot 10 - 78 = 780 - 78 = \mathbf{702}$$

$$14 \cdot 9 = 14 \cdot 10 - 14 = 140 - 14 = \mathbf{126}$$

31. Calcula mentalment els següents productes utilitzant aquesta tècnica i anota'n el resultat:

$$a) 28 \cdot 9 = \mathbf{252}$$

$$b) 13 \cdot 9 = \mathbf{117}$$

$$c) 41 \cdot 9 = \mathbf{369}$$

$$d) 125 \cdot 9 = \mathbf{1.125}$$

$$e) 56 \cdot 9 = \mathbf{504}$$

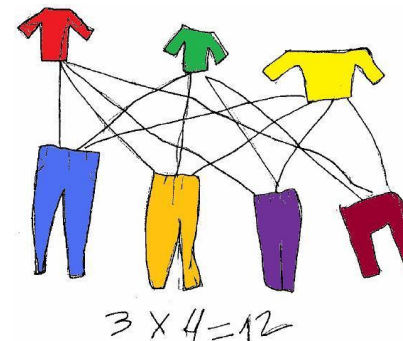
$$f) 84 \cdot 9 = \mathbf{756}$$

$$g) 24 \cdot 9 = \mathbf{216}$$

$$h) 39 \cdot 9 = \mathbf{351}$$

$$i) 47 \cdot 9 = \mathbf{423}$$

$$j) 134 \cdot 9 = \mathbf{1.206}$$



Sense llapis ni paper.

Elaboració de material didàctic per a afavorir el càlcul mental a l'ESO.

5. Multiplicar per 11

Què passa si multipliquem un nombre per 11? Quina estratègia podem fer servir per a multiplicar fàcilment un nombre de dues xifres per 11 sense necessitat d'utilitzar la calculadora? Fes proves si és necessari amb la calculadora i posa'n exemples.

Per multiplicar **un nombre de dues xifres per 11** escriurem el mateix nombre i, entre la xifra de les desenes i les unitats, afegirem la suma d'ambdues, augmentant la xifra immediatament esquerra en el cas que la suma parcial tingui desenes.

32. Calcula mentalment els següents productes utilitzant aquesta tècnica i anota'n el resultat:

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| a) $26 \cdot 11 = \mathbf{286}$ | e) $94 \cdot 11 = \mathbf{1.034}$ |
| b) $43 \cdot 11 = \mathbf{473}$ | f) $67 \cdot 11 = \mathbf{737}$ |
| c) $72 \cdot 11 = \mathbf{792}$ | g) $56 \cdot 11 = \mathbf{616}$ |
| d) $16 \cdot 11 = \mathbf{176}$ | h) $84 \cdot 11 = \mathbf{924}$ |

33. Serveix l'estratègia que has descrit per a multiplicar per 11 qualsevol nombre de dues xifres? Si no és així, descriu una estratègia per aquestes casuístiques.

Cal que els alumnes tinguin en consideració la possibilitat de que la suma de la xifra de les unitats i les desenes sigui superior a 9.

34. Fes amb la calculadora els següents productes de nombres de tres xifres per 11:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $125 \cdot 11 = \mathbf{1.375}$ | g) $834 \cdot 11 = \mathbf{9.174}$ |
| b) $452 \cdot 11 = \mathbf{4.972}$ | h) $293 \cdot 11 = \mathbf{3.223}$ |
| c) $346 \cdot 11 = \mathbf{3.806}$ | i) $746 \cdot 11 = \mathbf{8.206}$ |
| d) $134 \cdot 11 = \mathbf{1.474}$ | j) $587 \cdot 11 = \mathbf{6.457}$ |
| e) $226 \cdot 11 = \mathbf{2.486}$ | k) $235 \cdot 11 = \mathbf{2.585}$ |
| f) $513 \cdot 11 = \mathbf{5.643}$ | l) $672 \cdot 11 = \mathbf{7.392}$ |

35. Si haguessis de calcular mentalment els productes de l'exercici anterior, podries utilitzar l'estratègia que has descrit per a nombres de dues xifres? En qualsevol cas, descriu quina estratègia utilitzaries i posa'n exemples.

Per multiplicar **un nombre de tres xifres per 11**, igual que abans, escriurem les xifres dels extrems (en aquest cas, les centenes i les unitats) i al centre anirem afegint les sumes dels parells de xifres adjacents. Quan alguna d'aquestes sumes sigui més gran que 9 (per tant, de dues xifres), escriurem el dígit de les unitats i afegirem l'1 al nombre de l'esquerra.

6. Multiplicar per 101

Calcula els següents productes amb l'ajut de la calculadora:

$$56 \cdot 101 = \mathbf{5.656} \qquad 28 \cdot 101 = \mathbf{2.828}$$

$$13 \cdot 101 = \mathbf{1.313} \qquad 63 \cdot 101 = \mathbf{6.363}$$

Quina estratègia podem fer servir per multiplicar **un nombre per 101** sense usar la calculadora? Escriu-la a continuació:

*Per multiplicar **un nombre per 101** simplement haurem d'escriure el nombre repetit.*

36. Calcula mentalment els següents productes i anota'n el resultat:

$$\text{a) } 22 \cdot 101 = \mathbf{2.222} \qquad \text{f) } 68 \cdot 101 = \mathbf{6.868}$$

$$\text{b) } 34 \cdot 101 = \mathbf{3.434} \qquad \text{g) } 21 \cdot 101 = \mathbf{2.121}$$

$$\text{c) } 38 \cdot 101 = \mathbf{3.838} \qquad \text{h) } 47 \cdot 101 = \mathbf{4.747}$$

$$\text{d) } 46 \cdot 101 = \mathbf{4.646} \qquad \text{i) } 39 \cdot 101 = \mathbf{3.939}$$

$$\text{e) } 51 \cdot 101 = \mathbf{5.151} \qquad \text{j) } 94 \cdot 101 = \mathbf{9.494}$$

7. Meitats per dobles

Observa com s'han resolt les següents multiplicacions i completa l'estratègia que s'ha portat a terme:

$$12 \cdot 15 = 6 \cdot 30 = 180 \qquad 16 \cdot 35 = 8 \cdot 70 = 560$$

$$13 \cdot 50 = 6,5 \cdot 100 = 650 \qquad 19 \cdot 25 = 9,5 \cdot 50 = 475$$

*Per multiplicar **un múltiple de 5 per un nombre** és aconsellable multiplicar la meitat del nombre pel doble del múltiple de 5.*

37. Calcula mentalment els següents productes i anota'n el resultat:

$$\text{a) } 21 \cdot 50 = \mathbf{10,5 \cdot 100 = 1.050}$$

$$\text{f) } 22 \cdot 15 = \mathbf{11 \cdot 30 = 330}$$

$$\text{b) } 14 \cdot 25 = \mathbf{7 \cdot 50 = 350}$$

$$\text{g) } 13 \cdot 50 = \mathbf{6,5 \cdot 100 = 650}$$

$$\text{c) } 18 \cdot 15 = \mathbf{9 \cdot 30 = 270}$$

$$\text{h) } 17 \cdot 50 = \mathbf{8,5 \cdot 100 = 850}$$

$$\text{d) } 16 \cdot 45 = \mathbf{8 \cdot 90 = 720}$$

$$\text{i) } 12 \cdot 35 = \mathbf{6 \cdot 70 = 420}$$

$$\text{e) } 31 \cdot 50 = \mathbf{15,5 \cdot 100 = 1.550}$$

$$\text{j) } 26 \cdot 50 = \mathbf{13 \cdot 100 = 1.300}$$

8. El nombre misteriós

*Per a multiplicar dos nombres quasi consecutius, com per exemple 7 i 9, s'utilitza una tècnica que consisteix a multiplicar per sí mateix el que s'anomena **nombre misteriós** i després restar una unitat al resultat.*

Esbrina quin serà el nombre misteriós en cada cas i completa els productes següents:

$$7 \cdot 9 = \mathbf{8 \cdot 8 - 1 = 63}$$

$$6 \cdot 8 = \mathbf{7 \cdot 7 - 1 = 48}$$

$$5 \cdot 7 = \mathbf{6 \cdot 6 - 1 = 35}$$

38. Calcula mentalment els següents productes i anota'n el resultat:

$$\text{a) } 15 \cdot 17 = \mathbf{255}$$

$$\text{f) } 12 \cdot 14 = \mathbf{168}$$

$$\text{k) } 65 \cdot 67 = \mathbf{4.355}$$

$$\text{b) } 6 \cdot 4 = \mathbf{24}$$

$$\text{g) } 21 \cdot 23 = \mathbf{483}$$

$$\text{l) } 13 \cdot 15 = \mathbf{195}$$

$$\text{c) } 7 \cdot 5 = \mathbf{35}$$

$$\text{h) } 16 \cdot 18 = \mathbf{288}$$

$$\text{m) } 24 \cdot 26 = \mathbf{624}$$

$$\text{d) } 11 \cdot 13 = \mathbf{143}$$

$$\text{i) } 31 \cdot 33 = \mathbf{1.023}$$

$$\text{n) } 107 \cdot 109 = \mathbf{11.663}$$

$$\text{e) } 9 \cdot 7 = \mathbf{62}$$

$$\text{j) } 55 \cdot 57 = \mathbf{3.135}$$

$$\text{o) } 29 \cdot 27 = \mathbf{783}$$

4. La divisió

La divisió (o fracció) és la operació inversa del producte. Per aquest motiu, per a dividir és fonamental conèixer molt bé les taules de multiplicar i tenir presents les següents consideracions:



- **La divisió no té la propietat commutativa**, i per tant, no podem intercanviar la posició del dividend i el divisor.
Exemple: $8 : 2$ no és el mateix que $2 : 8$, ja que $8 : 2 = 4$ i $2 : 8 = 0,25$.
- **El resultat d'una divisió no sempre és exacte**
Direm que la divisió és exacta quan el seu residu sigui igual a zero, en cas contrari parlarem de divisió inexacta o entera.
- **No es pot dividir un nombre entre 0**
Perquè no existeix cap quocient que multiplicat per 0 sigui igual a un dividend diferent de zero.

A continuació treballarem algunes de les tècniques que ens permetran calcular mentalment divisions àgilment.

1. Ús de la prova de la divisió

Per a efectuar **divisions exactes** mentalment, com ara $18:3$, podem utilitzar la prova de la divisió i transformar la divisió en un producte. Per exemple, en aquest cas, pensaríem en quin nombre cal multiplicar el 3 per a obtenir 18:

Divisió	Producte
$18 : 3 = ?$	$3 \cdot ? = 18$

39. Calcula mentalment les següents divisions exactes (pots ajudar-te pensant-les com productes):

- | | |
|--------------------|-------------------|
| a) $16 : 4 = 4$ | l) $60 : 15 = 4$ |
| b) $28 : 2 = 14$ | m) $24 : 4 = 6$ |
| c) $36 : 3 = 12$ | n) $108 : 2 = 54$ |
| d) $121 : 11 = 11$ | o) $27 : 3 = 9$ |
| e) $81 : 9 = 9$ | p) $96 : 12 = 8$ |
| f) $12 : 3 = 4$ | q) $128 : 2 = 64$ |
| g) $49 : 7 = 7$ | r) $243 : 9 = 27$ |
| h) $16 : 8 = 2$ | s) $63 : 21 = 3$ |
| i) $42 : 6 = 7$ | t) $125 : 25 = 5$ |
| j) $50 : 5 = 10$ | u) $117 : 39 = 3$ |
| k) $144 : 12 = 12$ | v) $54 : 18 = 3$ |

2. Factorització del divisor

Quan el divisor de la divisió sigui un múltiple fàcilment **factoritzable**, el factoritzarem i dividirem el dividend per cadascun dels factors.

Per exemple:

a) $72 : 6$

Com que la factorització del 6 és $2 \cdot 3$, per a dividir un nombre entre 6 el dividirem per 2 i el resultat per 3 (o a l'inrevés):

$$72 : (2 \cdot 3) = (72 : 2) : 3 = 36 : 3 = 12$$

b) $136 : 8$

Com que la factorització del 8 és $2 \cdot 2 \cdot 2$, per a dividir un nombre entre 8 el dividirem tres cops per 2:

$$136 : (2 \cdot 2 \cdot 2) = ((136 : 2) : 2) : 2 = (68 : 2) : 2 = 34 : 2 = 17$$

- 40.** Calcula mentalment les divisions que et proposem a la primera columna d'aquest quadre. Per fer-ho, pots ajudar-te factoritzant el divisor com s'indica a l'exemple:

Divisió	Factorització del divisor	Resultat
a) $460 : 20$	$2 \cdot 10$	23
b) $108 : 9$	$3 \cdot 3$	12
c) $104 : 8$	$2 \cdot 4$	13
d) $78 : 6$	$2 \cdot 3$	13
e) $90 : 6$	$2 \cdot 3$	15
f) $126 : 18$	$2 \cdot 9$	7
g) $54 : 6$	$2 \cdot 3$	9
h) $32 : 4$	$2 \cdot 2$	8
i) $128 : 16$	$2 \cdot 4$	8
j) $105 : 21$	$3 \cdot 7$	5
k) $42 : 14$	$2 \cdot 7$	3
l) $135 : 9$	$3 \cdot 3$	15
m) $360 : 30$	$3 \cdot 10$	12
n) $420 : 20$	$2 \cdot 10$	21
o) $84 : 12$	$4 \cdot 3$	7

Hem dividit 460
entre 2 i entre 10
(els factors del 20).

$$34 : 5 = (34 \cdot 2) : 10 = 68 : 10 = 6,8$$

$$16 : 5 = (16 \cdot 2) : 10 = 32 : 10 = 3,2$$

Per **dividir un nombre entre 5** és aconsellable **multiplicar-lo per 2 i després dividir el resultat entre 10**.

- 41.** Utilitzant l'estratègia que acabes de descriure, calcula mentalment les següents divisions (que no tenen perquè ser enteres!):

$$a) 44 : 5 = 88 : 10 = 8,8$$

$$b) 95 : 5 = 190 : 10 = 19$$

$$c) 43 : 5 = 86 : 10 = 8,6$$

$$d) 82 : 5 = 164 : 10 = 16,4$$

$$e) 12 : 5 = 24 : 10 = 2,4$$

$$f) 26 : 5 = 52 : 10 = 5,2$$

$$g) 65 : 5 = 130 : 10 = 13$$

$$h) 36 : 5 = 72 : 10 = 7,2$$

$$i) 19 : 5 = 38 : 10 = 3,8$$

$$j) 33 : 5 = 66 : 10 = 6,6$$

$$k) 50 : 5 = 100 : 10 = 10$$

$$l) 103 : 5 = 206 : 10 = 20,6$$

$$m) 41 : 5 = 82 : 10 = 8,2$$

$$n) 92 : 5 = 184 : 10 = 18,4$$

$$o) 130 : 5 = 260 : 10 = 26$$

$$p) 33 : 5 = 66 : 10 = 6,6$$

$$q) 240 : 5 = 480 : 10 = 48$$

$$r) 105 : 5 = 210 : 10 = 21$$

$$s) 90 : 5 = 180 : 10 = 18$$

$$t) 51 : 5 = 102 : 10 = 10,2$$

- 42.** Pensa i escriu una estratègia per a dividir mentalment de forma senzilla un nombre entre 25. Posa'n exemples.

Per **dividir un nombre entre 25** és aconsellable **multiplicar-lo per 4 i després dividir el resultat entre 100**. Exemple: $325 : 25 = (325 \cdot 4) : 100 = 1300 : 100 = 13$.

3. Divisió entre 5

Observa com s'han resolt les següents divisions i completa l'estratègia que s'ha portat a terme:

$$75 : 5 = (75 \cdot 2) : 10 = 150 : 10 = 15$$

$$85 : 5 = (85 \cdot 2) : 10 = 170 : 10 = 17$$

Sense llapis ni paper.

Elaboració de material didàctic per a afavorir el càlcul mental a l'ESO.

4. Divisió entre la unitat seguida de zeros

Calcula, amb l'ajut de la calculadora, les divisions següents:

$$31 : 100 = \mathbf{0,31}$$

$$17.350,45 : 10 = \mathbf{1.735,045}$$

$$43,26 : 100 = \mathbf{0,4326}$$

$$20,7 : 1.000 = \mathbf{0,0207}$$

En vista dels resultats obtinguts, quina creus que és l'estratègia per a calcular mentalment divisions entre la unitat seguida de zeros?

Per dividir **un nombre per la unitat seguida de zeros** hem de moure la coma del nombre cap a l'esquerra tantes posicions com zeros hi ha darrera la unitat (recorda que la coma es troba sempre darrera de les unitats). En cas de que no hi hagi prou xifres davant la coma afegirem tants zeros com sigui necessari.

43. Aplica l'estratègia que has deduït per a completar la taula següent:

	: 10	: 100	: 1.000	: 10.000	: 100.000
7,01	0,701	0,0701	0,00701	0,000701	0,0000701
280	28	2,8	0,28	0,028	0,0028
37,018	3,7018	0,37018	0,037018	0,0037018	0,00037018
0,6	0,06	0,006	0,0006	0,00006	0,000006
87.229,4	8.722,94	872,294	87,2294	8,72294	0,872294
3,15	0,315	0,0315	0,00315	0,000315	0,0000315
29.007,17	2.900,717	290,0717	29,00717	2,900717	0,2900717
68,001	6,8001	0,68001	0,068001	0,0068001	0,00068001
11.755,58	1.175,558	117,5558	1,175558	0,1175558	0,01175558
999,1	99,91	9,991	0,9991	0,09991	0,009991
53.734,75	5.373,475	537,3475	53,73475	5,373475	0,5373475
19.751	1.975,1	197,51	19,751	1,9751	0,19751
0,233	0,0233	0,00233	0,000233	0,0000233	0,00000233

Sense llapis ni paper.

Elaboració de material didàctic per a afavorir el càlcul mental a l'ESO.

5. Dividends múltiples de 10

Per a **dividir un múltiple de 10** (nombre acabat per un o més zeros), el dividirem sense tenir en compte els zeros i després afegirem els zeros al quocient.

Exemples:

$$120 : 4 = (12 : 4) \cdot 10 = 30$$

$$6.400 : 32 = (64 : 32) \cdot 100 = 200$$

$$340 : 4 = (34 : 4) \cdot 10 = 85$$

44. Calcula mentalment les divisions que et proposem seguint l'estratègia que t'acabem de presentar:

$$\text{a) } 8.500 : 5 = \mathbf{1.700}$$

$$\text{f) } 1.200 : 3 = \mathbf{400}$$

$$\text{k) } 1.440 : 12 = \mathbf{120}$$

$$\text{b) } 280 : 4 = \mathbf{70}$$

$$\text{g) } 3.600 : 9 = \mathbf{400}$$

$$\text{l) } 600 : 15 = \mathbf{40}$$

$$\text{c) } 350 : 7 = \mathbf{50}$$

$$\text{h) } 500 : 25 = \mathbf{20}$$

$$\text{m) } 2.560 : 4 = \mathbf{640}$$

$$\text{d) } 1.210 : 11 = \mathbf{110}$$

$$\text{i) } 840 : 4 = \mathbf{210}$$

$$\text{n) } 600 : 12 = \mathbf{50}$$

$$\text{e) } 4.900 : 7 = \mathbf{700}$$

$$\text{j) } 42.000 : 6 = \mathbf{7.000}$$

$$\text{o) } 270 : 9 = \mathbf{30}$$

45. Calcula mentalment:

$$\text{a) } 3.300 : 11 = \mathbf{300}$$

$$\text{f) } 790 : 10 = \mathbf{79}$$

$$\text{k) } 1.350 : 9 = \mathbf{150}$$

$$\text{b) } 800.000 : 20 = \mathbf{40.000}$$

$$\text{g) } 4.200 : 100 = \mathbf{42}$$

$$\text{l) } 900 : 20 = \mathbf{45}$$

$$\text{c) } 6.000 : 5 = \mathbf{1.200}$$

$$\text{h) } 800 : 10 = \mathbf{80}$$

$$\text{m) } 6.400 : 4 = \mathbf{1.600}$$

$$\text{d) } 5.400 : 100 = \mathbf{54}$$

$$\text{i) } 9.500 : 100 = \mathbf{95}$$

$$\text{n) } 2.550 : 150 = \mathbf{17}$$

$$\text{e) } 120 : 4 = \mathbf{30}$$

$$\text{j) } 64.000 : 8 = \mathbf{8.000}$$

$$\text{o) } 240 : 30 = \mathbf{80}$$

5. Les potències i arrels

Una **potència** és el resultat de multiplicar un nombre (*la base*) per ell mateix varies vegades (*exponent*).

L'**arrel d'un nombre** és un altre nombre que, pres un cert nombre de vegades com a factor, dóna el nombre inicial. Concretament, s'anomena **arrel quadrada** d'un nombre a qualsevol altre que, elevat al quadrat, és igual al primer. S'anomena **arrel cúbica** d'un nombre a qualsevol altre que, elevat al cub, és igual al primer.

A continuació farem algunes reflexions en relació al càlcul d'aquestes operacions i treballarem diversos mètodes útils per tenir agilitat en el càlcul mental d'algunes potències i arrels.

46. Respon a les següents qüestions.

- a) S'anomena **quadrat perfecte** a qualsevol nombre que és el quadrat d'un altre. Les unitats dels quadrats perfectes només poden ser 6 diferents. Amb l'ajut de la calculadora, escriu quines són:

0, 1, 4, 5, 6 i 9

- b) Sense fer cap càlcul, encercla els nombres que segur que no són quadrats perfectes.

- | | |
|-----------|-----------|
| a) 7.056 | f) 4.225 |
| b) 2.588 | g) 19.600 |
| c) 6.137 | h) 3.578 |
| d) 16.129 | i) 2.561 |
| e) 4.621 | j) 1.184 |

- c) Ara, amb l'ajut de la calculadora, indica quins (dels nombres de l'apartat anterior) sí són quadrats perfectes.

- d) Fixa't que els quadrats de tots els nombres acabats en 0 també acaben en 0, els dels acabats en 1 també acaben en 1, els dels acabats en 2 acaben en 4,... Amb l'ajut de la calculadora, completa aquesta taula que conté totes les possibles terminacions dels quadrats perfectes:

Unitats del nombre	Terminació dels quadrats
0	0
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1

- e) Sabies que per a qualsevol nombre que elevem succeeix el mateix? Completa la taula de terminacions dels cubs.

Unitats del nombre	Terminació dels cubs
0	0
1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9

1. Càlcul del quadrat d'un nombre

“La distància o diferència entre dos nombres consecutius al quadrat és igual a la suma d'ambdós”

Per exemple: $6^2 = 36$ i $7^2 = 49$. Efectivament, $49 - 36 = 13$ que coincideix amb $6 + 7 = 13$.

Posa un parell d'exemples:

8^2 i 9^2 , on $81 - 64 = 17$ i $8 + 9 = 17$.

Si generalitzem l'afirmació anterior, tenim:

“La distància o diferència entre dos nombres qualsevols al quadrat és igual a la suma d'ambdós per la seva diferència”

Per exemple: $6^2 = 36$ i $9^2 = 81$. Efectivament, $81 - 36 = 45$ que equival a $(9 + 6) \cdot (9 - 6) = 45$.

Escriu a quina coneguda fórmula matemàtica fa referència aquesta afirmació:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Fixa't que aquesta fórmula ens permet determinar quadrats a partir d'altres ja coneguts. Per exemple:

Calcularem 37^2 , sabent que $30^2 = 900$.

Com que $37 + 30 = 67$ i $37 - 30 = 7$;

si multipliquem $67 \cdot 7$ i li afegim 30^2 obtenim 1.369.

Per tant: $37^2 = 1.369$

47. Calcula mentalment els següents quadrats:

a) 84^2 , sabent que $80^2 = 6.400$.

$$6.400 + (164 \cdot 4) = 7.056$$

b) 29^2 , sabent que $20^2 = 400$.

$$400 + (49 \cdot 9) = 841$$

c) 17^2 , sabent que $10^2 = 100$.

$$100 + (27 \cdot 7) = 289$$

d) 31^2 , sabent que $30^2 = 900$.

$$900 + (61 \cdot 1) = 961$$

e) 78^2 , sabent que $70^2 = 4.900$.

$$4.900 + (148 \cdot 8) = 6.084$$

f) 13^2 , sabent que $10^2 = 100$.

$$100 + (23 \cdot 3) = 169$$

g) 24^2 , sabent que $20^2 = 400$.

$$400 + (44 \cdot 4) = 576$$

h) 19^2 , sabent $10^2 = 100$.

$$100 + (29 \cdot 9) = 361$$

i) 26^2 , sabent $20^2 = 400$.

$$400 + (46 \cdot 6) = 676$$

j) 46^2 , sabent $40^2 = 1.600$.

$$1.600 + (86 \cdot 6) = 2.116$$

k) 61^2 , sabent $60^2 = 3.600$.

$$3.600 + (121 \cdot 1) = 3.721$$

l) 34^2 , sabent $30^2 = 900$.

$$900 + (64 \cdot 4) = 1.156$$

m) $54^2 = 2.500 + (104 \cdot 4) = 2.916$

n) $92^2 = 8.100 + (182 \cdot 2) = 8.464$

o) $15^2 = 100 + (25 \cdot 5) = 225$

5.2. El quadrat de nombres de dues xifres acabats en 5

Calcular el quadrat de nombres de dues xifres acabats en 5 és senzill. Fixa't en els següents i descriu una estratègia per a calcular-los mentalment:

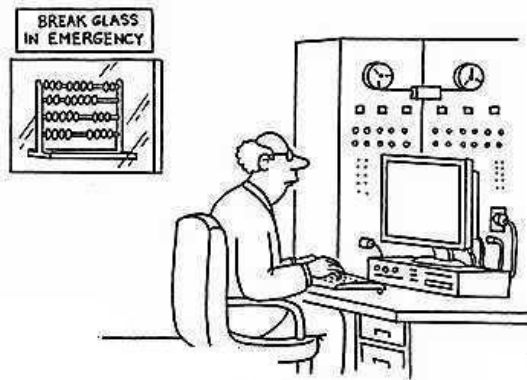
$$\begin{aligned}15^2 &= 225 \\45^2 &= 2.025 \\85^2 &= 7.225 \\105^2 &= 11.025\end{aligned}$$

Estratègia:

Tots els quadrats de nombres de dues xifres acabats en 5 acaben en 25. Al davant només cal afegir

48. Calcula mentalment els següents quadrats aplicant l'estratègia que acabes de definir:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) $85^2 = 7.225$ | f) $75^2 = 5.625$ |
| b) $25^2 = 625$ | g) $65^2 = 4.225$ |
| c) $35^2 = 1.225$ | h) $55^2 = 3.025$ |
| d) $45^2 = 2.025$ | i) $15^2 = 225$ |
| e) $95^2 = 9.025$ | |



Sense llapis

Elaboració de material didàctic per a afavorir el càlcul mental a l'ESO.

5.3. Arrels quadrades exactes de nombres de dues xifres

Suposem que volem calcular quina és l'arrel quadrada de 2.916. La trobarem en dos passos:

- 1) Com que la xifra de les unitats és 6, sabem que les **unitats** del nombre que busquem serà 4 ó 6 (veure exercici 45 apartat d)).
- 2) Trobarem les **desenes** del nombre per tanteig:

$$40^2 = 1.600$$

$$50^2 = 2.500$$

$$60^2 = 3.600$$

Observem que $50^2 < \sqrt{2.916} < 60^2$. Aleshores, per a saber si $\sqrt{2.916}$ és 54 ó 56:

$$55^2 = 3.025$$

Com que $50^2 < \sqrt{2.916} < 55^2$, podem concloure que $\sqrt{2.916} = 54$.

49. Calcula, seguint aquest mètode de càlcul d'arrels quadrades:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $\sqrt{676} = 26$ | h) $\sqrt{1.225} = 35$ |
| b) $\sqrt{7.056} = 84$ | i) $\sqrt{3.481} = 59$ |
| c) $\sqrt{3.364} = 58$ | j) $\sqrt{961} = 31$ |
| d) $\sqrt{4.624} = 68$ | k) $\sqrt{7.921} = 89$ |
| e) $\sqrt{5.329} = 73$ | l) $\sqrt{2.116} = 46$ |
| f) $\sqrt{361} = 19$ | m) $\sqrt{441} = 21$ |
| g) $\sqrt{4.489} = 67$ | n) $\sqrt{1.296} = 36$ |

5.4. Arrels cúbiques exactes de nombres de dues xifres

Suposem que ara volem calcular quina és l'**arrel cúbica** de 46.656. La trobarem en dos passos:

- 1) Com que la xifra de les unitats és 6, sabem que les **unitats** del nombre que busquem serà 6 (veure exercici 45 apartat e)).
- 2) Seguidament trobarem les **desenes** del nombre per tanteig:

$$30^3 = 27.000$$

$$40^3 = 64.000$$

$$50^3 = 125.000$$

Observem que $30^3 < \sqrt[3]{46.656} < 40^3$. Aleshores, podem concloure que $\sqrt[3]{46.656} = 36$.

50. Calcula, seguint aquest mètode de càlcul d'arrels cúbiques:

a) $\sqrt[3]{238.328} = \mathbf{62}$

h) $\sqrt[3]{10.648} = \mathbf{22}$

b) $\sqrt[3]{13.824} = \mathbf{24}$

i) $\sqrt[3]{19.683} = \mathbf{27}$

c) $\sqrt[3]{42.875} = \mathbf{35}$

j) $\sqrt[3]{103.823} = \mathbf{47}$

d) $\sqrt[3]{614.125} = \mathbf{85}$

k) $\sqrt[3]{24.389} = \mathbf{29}$

e) $\sqrt[3]{4.096} = \mathbf{16}$

l) $\sqrt[3]{148.877} = \mathbf{53}$

f) $\sqrt[3]{12.167} = \mathbf{23}$

m) $\sqrt[3]{2.197} = \mathbf{13}$

g) $\sqrt[3]{1.728} = \mathbf{12}$

n) $\sqrt[3]{110.592} = \mathbf{48}$

Sense llapis ni paper.

Elaboració de material didàctic per a afavorir el càlcul mental a l'ESO.

Càlcul mental aproximat

Hi ha càlculs que no requereixen d'una resposta exacta. Aleshores, per resoldre'ls, és suficient amb estimar o esbrinar aproximadament quin és el seu resultat. Hi ha dues tècniques per a obtenir resultats aproximats: l'arrodoniment i el truncament.

1. L'arrodoniment

Una forma ràpida i senzilla d'estimar el resultat d'una operació consisteix a **arrodonir** cada nombre i després operar-los.

Arrodonir és la substitució, a partir d'un cert lloc, de totes les xifres per zeros. Cal tenir en compte si la primera xifra que es substitueix és 5 o major que 5, en aquest cas s'augmenta en una unitat la xifra anterior a la substituïda.

Quan arrodonim el resultat que obtindrem no serà exacte però, en alguns casos, serà el suficientment proper. Per exemple, si estem a una botiga on hem comprat dos articles de valor 18 i 54 euros respectivament, per tenir una idea aproximada de quant haurem de pagar faríem:

$$18 + 54 \approx 20 + 50 = 70$$

Hem arrodonit el 18 a 20 i el 54 a 50 i hem obtingut 70, quan el càlcul exacte és 72.

Fixa't que l'estimació és un recurs que pot ser útil per anticipar i controlar resultats de càlculs obtinguts mitjançant una altra estratègia.

1. Estima el resultat arrodonint a la desena més propera; com has vist a l'exemple:

- | | | |
|-----------------------------------|---|----------------------------------|
| a) $18 + 23 \approx \mathbf{40}$ | i) $47 \cdot 76 \approx \mathbf{3.570}$ | q) $62 - 48 \approx \mathbf{10}$ |
| b) $57 + 72 \approx \mathbf{130}$ | j) $67 \cdot 34 \approx \mathbf{2.280}$ | r) $74 - 63 \approx \mathbf{10}$ |
| c) $69 + 44 \approx \mathbf{110}$ | k) $68 \cdot 44 \approx \mathbf{2.990}$ | s) $87 - 12 \approx \mathbf{80}$ |

- | | | |
|-----------------------------------|---|----------------------------------|
| d) $22 + 87 \approx \mathbf{110}$ | l) $83 \cdot 74 \approx \mathbf{6.140}$ | t) $98 - 64 \approx \mathbf{30}$ |
| e) $93 + 46 \approx \mathbf{140}$ | m) $57 \cdot 27 \approx \mathbf{1.540}$ | u) $87 - 54 \approx \mathbf{30}$ |
| f) $25 + 87 \approx \mathbf{110}$ | n) $47 \cdot 62 \approx \mathbf{2.910}$ | v) $58 - 29 \approx \mathbf{30}$ |
| g) $52 + 34 \approx \mathbf{90}$ | o) $31 \cdot 43 \approx \mathbf{1.330}$ | w) $89 - 46 \approx \mathbf{40}$ |
| h) $81 + 16 \approx \mathbf{100}$ | p) $52 \cdot 48 \approx \mathbf{2.500}$ | x) $66 - 41 \approx \mathbf{30}$ |

2. Estima el resultat arrodonint a la centena més propera.

- | | | |
|---------------------------------------|---|-------------------------------------|
| a) $710 + 678 \approx \mathbf{1.400}$ | i) $546 \cdot 345 \approx \mathbf{188.400}$ | q) $187 - 41 \approx \mathbf{100}$ |
| b) $819 + 342 \approx \mathbf{1.200}$ | j) $234 \cdot 34 \approx \mathbf{8.000}$ | r) $294 - 63 \approx \mathbf{200}$ |
| c) $991 + 653 \approx \mathbf{1.600}$ | k) $989 \cdot 89 \approx \mathbf{88.000}$ | s) $148 - 25 \approx \mathbf{100}$ |
| d) $703 + 467 \approx \mathbf{1.200}$ | l) $984 \cdot 567 \approx \mathbf{557.900}$ | t) $320 - 64 \approx \mathbf{300}$ |
| e) $369 + 482 \approx \mathbf{900}$ | m) $766 \cdot 22 \approx \mathbf{16.900}$ | u) $924 - 32 \approx \mathbf{900}$ |
| f) $631 + 776 \approx \mathbf{1.400}$ | n) $892 \cdot 31 \approx \mathbf{27.700}$ | v) $412 - 26 \approx \mathbf{400}$ |
| g) $675 + 560 \approx \mathbf{1.200}$ | o) $585 \cdot 18 \approx \mathbf{10.500}$ | w) $564 - 112 \approx \mathbf{500}$ |
| h) $367 + 141 \approx \mathbf{500}$ | p) $697 \cdot 23 \approx \mathbf{16.000}$ | x) $798 - 251 \approx \mathbf{500}$ |

3. Encercla el resultat que es demana en cada cas:

a) En Joan ha comprat una tableta digital per 524€ i un *Smartphone* per 187€. Arrodonint a la centena més propera, quina és la millor estimació del preu total?

- a) 800 b) **700** c) 600 d) 1.000

b) Quin dels següents nombres dona una estimació més propera a $87 + 34$ a l'arrodonir a la desena més propera?

- a) **120** b) 130 c) 140 d) 110

2. El truncament

El truncament consisteix a **eliminar decimals**, que sempre fan més difícil els càlculs. És a dir, per truncar un nombre en certa xifra decimal, eliminarem les xifres decimals següents. Per exemple, si trunquem el nombre $\pi = 3,1415\dots$ a les centèsimes tindríem 3,14.



4. Completa el quadre següent amb els dos mètodes de càlcul aproximat que hem estudiat:

	Aproximació per truncament	Aproximació per arrodoniment
Aproximar a la deumil·lèsima 3,1415926534	3,1415	3,1416
Aproximar a la mil·lèsima 9,567518	9,567	9,568
Aproximar a la centèsima 5,2783256	5,27	5,28
Aproximar a la deumil·lèsima 0,1211136	0,1211	0,1211
Aproximar a la mil·lèsima 8,2547893	8,2547	8,2548
Aproximar a la dècima 7,5462102	7,5	7,5
Aproximar a la centèsima 14,684579	14,68	14,68
Aproximar a la deumil·lèsima 2,4516798	2,4516	2,4517
Aproximar a la mil·lèsima 0,3685711	0,368	0,369

5. Completa:

El truncament només pot donar-se en nombres **decimals** i consisteix a **eliminar** les xifres a partir d'aquelles per a les quals es realitza el truncament.

En el cas del **truncament per la unitat**, s'eliminen **tots els decimals**.

Per exemple, 122,3434 es trunca com 122.

En el cas del **truncament per la dècima**, tan sols **es deixa una xifra decimal**.

Per exemple, 122,3434 es trunca com 122,3.

En el cas del **truncament per la centèsima**, tan sols **es deixen dues xifres decimals**.

Per exemple, 122,3434 es trunca com 122,34.

I així successivament.

6. Arrodoneix a les centèsimes els següents nombres:

a) 2,71828... **2,72**

b) $1,\overline{67}$ **1,68**

c) 0,342 **0,34**

d) $7,5\hat{3}$ **7,53**

e) 12,455 **12,46**

f) π **3,15**

Si enlloc d'arrodonir haguessis truncat els nombres anteriors, al fer un càlcul amb ells, amb quina forma d'aproximació cometries un error menor? Raona-ho.

Operacions amb calculadora



En aquest apartat treballarem l'aplicació d'algunes tecles de la **calculadora científica** i el seu funcionament.

Recorda que descriurem el funcionament de manera general, ja que no podem mostrar com s'utilitzen tots els models diferents de calculadores científiques que hi ha al mercat. Et recomanem que

quan tinguis un dubte, consultis el manual d'ús de la teva calculadora.

1. La calculadora científica

La principal diferència d'aquestes calculadores respecte les calculadores estàndards és que les operacions es realitzen respectant la seva jerarquia. A més, moltes tecles serveixen per realitzar dues o més accions (per activar la segona acció s'ha de prémer primer la **tecla SHIFT** o una altra tecla de cert color). Fixa't que en algunes calculadores primer es prem el número i després l'acció i en d'altres primer l'acció i després el número.

1. Respon a les següents qüestions:

- a) La tecla $\sqrt{}$ serveix per fer arrels quadrades i la tecla x^2 per elevar al quadrat.

Identifica-les a la teva calculadora i resol:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{54.360} = 233,15 & 675^2 = 455.625 \\ \sqrt{89.225} = 298,71 & 864^2 = 746.496 \\ \sqrt{10.609} = 103 & (-913)^2 = 833.569 \end{array}$$

- b) La tecla x^y serveix per fer qualsevol potència.

Identifica-la a la teva calculadora i resol:

$$\begin{array}{ll} 135^3 = 2.460.375 & 874^4 = 5,83 \cdot 10^{11} \\ (-89.204)^2 = 7,96 \cdot 10^9 & (-247)^3 = -1,5 \cdot 10^7 \\ 937^5 = 7,22 \cdot 10^5 & 428^5 = 1,43 \cdot 10^{13} \end{array}$$

- c) La tecla EXP indica en quants zeros acaba el nombre.

Per exemple, podríem escriure 8.000 teclejant 8 EXP 3 o veure com 34 EXP 10 ó 3,4 EXP 11 equival a 340.000.000.000.

Escriu les equivalències:

$$\begin{array}{ll} 15 \text{ EXP } 4 = \mathbf{150.000} & 70.000.000 = \mathbf{7 \text{ EXP } 7} \\ 2,75 \text{ EXP } 8 = \mathbf{2.750.000} & 56.000 = \mathbf{5,6 \text{ EXP } 4} \\ 5,2 \text{ EXP } 4 = \mathbf{52.000} & -42.000.000 = \mathbf{-4,2 \text{ EXP } 7} \end{array}$$

- d) Saps com funciona la memòria de la teva calculadora? Experimenta i relaciona cada tecla amb el seu funcionament:

C
AC
Min
MR
M+
M-
X \leftrightarrow M

- a) Recupera el contingut de la memòria i l'escriu per pantalla (Memory Recall). **MR**
- b) Emmagatzema a la memòria la dada que hi ha a la pantalla substituint el què hi hagués emmagatzemat. Al polsar-la, apareix una M a la pantalla. **Min**
- c) Intercanvia la dada que hi ha a la pantalla amb el contingut de la memòria. **X \leftrightarrow M**
- d) Emmagatzema a la memòria la dada que hi ha a la pantalla amb el mateix signe i ho suma al que hi ha en memòria. **M+**
- e) Emmagatzema a la memòria la dada que hi ha a la pantalla amb el signe canviat i ho suma al que hi ha en memòria. **M-**
- f) Esborra solament la dada que hi ha a la pantalla. **C**
- g) Esborra la dada que hi ha a la pantalla i anul·la les operacions teclejades. **AC**

- e) Resol, sense apuntar cap resultat parcial, fent ús de la memòria de la calculadora:

I) $3,5 \cdot (8,2 - 7) + 3,13 \cdot (5 - 1,4) - 6 \cdot (7,44 - 12) =$

II) $8,7 - 3,6 \cdot (3 - 2,68) + 3 \cdot (9,15 - 7,32) =$

III) $6,8 - 2 \cdot \left(\frac{2,7-3}{4,2}\right) =$

2. La prioritat de les operacions

Recordes en quin ordre s'ha de resoldre una operació combinada com aquesta?

$$(16 - 4) + 5 - (11 - 4 \cdot 3) + (5 + 18 : 9) - 3 + (10 - 2^2) =$$

2. Ordena de l'1 al 4 d'acord a l'ordre de prioritats (o jerarquia) de les operacions:

- 4 Resoldre les sumes i restes
- 1 Desenvolupar els claudàtors i parèntesis
- 3 Resoldre les multiplicacions i divisions
- 2 Resoldre les potències i arrels

3. Resol les expressions següents amb la calculadora i tenint en compte la jerarquia de les operacions:

a) $14 - (7 + 4 \cdot 3 - ((-2)^2 \cdot 2 - 6)) =$

b) $\frac{6}{2}(2 + 1) =$

c) $(15 - (2^3 - 10 : 2)) \cdot (5 + (3 \cdot 2 - 4)) - 3 + (8 - 2 \cdot 3) =$

d) $2^3 + 10 : 2 + 5 \cdot 3 + 4 - 5 \cdot 2 - 8 + 4 \cdot 2^2 - 16 : 4 =$

e) $\frac{5-2}{2}(3^2 + 1) + (2 \cdot (-1)^3)^2 =$

f) $(-2)^3 \cdot (-1)^2 + \frac{7}{3}(3 + 2^2) =$

4. Resol amb la calculadora i encercla la solució correcta:

I) $\frac{9 \cdot 8 - 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 + 4 \cdot 5} =$

- a) 7 b) 14,11 c) **1,15** d) Cap de les anteriors

II) $\frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{2} =$

- a) **11** b) 13 c) 4 d) Cap de les anteriors

III) $\sqrt{3^2 + (-4)^2} =$

- a) -1 b) **5** c) 1 d) No té solució

IV) $\frac{-3 + \sqrt{9^2 + 4 \cdot 2^3}}{2 \cdot 3^2 + 5} =$

- a) **0,33** b) 1,65 c) 2,11 d) Cap de les anteriors

V) $\frac{2 + \sqrt{\frac{2^3}{7} + 3^2}}{\left(\frac{1}{3^2} + \frac{5}{2^2}\right)^2} =$

- a) 2 b) 2,4 c) 2,8 d) Cap de les anteriors

VI) $\sqrt{(-5)^2 + 11} =$

- a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{-16}$ c) 26 d) **6**

3. La notació científica

La massa de la terra és:

$$m_{terra} = 5.974.000.000.000.000.000.000.000 \text{ kg}$$

I la d'un electró:

$$m_{elec} = 0,0000000000000000000000000000911 \text{ g}$$



Com pots observar, cap d'aquests nombres cap a la pantalla de la calculadora perquè tenen massa dígits. No obstant, per poder mostrar-los, la calculadora utilitza la **notació científica**. En aquest cas:

$$m_{terra} = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad \text{i} \quad m_{elec} = 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ g}$$

Una quantitat expressada en notació científica consisteix en **un producte** d'un nombre enter de l'1 al 9 (o un decimal que té com a part entera un dígit de l'1 al 9) multiplicat per una potència de 10 amb exponent positiu o negatiu.

Per a introduir la *massa de la terra* a la calculadora, directament en notació científica, haurem de teclejar 5,974 EXP 24.

5. Completa el quadre següent:

Expressió matemàtica	Seqüència a la calculadora	Valor
$3,56 \cdot 10^{-5}$	3,56 EXP 5 +/-	0,0000356
$8,5 \cdot 10^6$	8,5 EXP 6	8.500.000
$9,72 \cdot 10^{10}$	9,72 EXP 10	972.000.000
$2,54 \cdot 10^{-6}$	2,54 EXP 6 +/-	0,00000254
$4 \cdot 10^{-6}$	4 EXP 6 +/-	0,0004

Sense llapis ni paper.

Elaboració de material didàctic per a afavorir el càlcul mental a l'ESO.

6. Resol amb la calculadora i anota el resultat en notació científica:

a) $2,5 \cdot 10^3 + 7,25 \cdot 10^4 = 7,5 \cdot 10^4$

b) $\frac{1,125 \cdot 10^{-4} + 2,56 \cdot 10^{-3}}{1,154 \cdot 10^{-6}} = 2,315 \cdot 10^3$

c) $\frac{1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^5} = 2,1$

d) $\frac{1,569 \cdot 10^{-4} + \sqrt[3]{2,741 \cdot 10^{-2} + 1}}{3 \cdot 10^2} = 3,364 \cdot 10^{-3}$

7. Resol aplicant el factor de conversió corresponent i escriu el resultat en notació científica.

a) Quina edat tindria un individu que hagués viscut mil dos-cents quaranta mil milions de segons?

35.428 anys

b) Una molècula d'hidrogen pesa $3,3 \cdot 10^{-24}$ g. Quantes molècules hi ha en un gram d'hidrogen?

$3 \cdot 10^{23}$ molècules

c) Si una persona té 5 litres de sang i aproximadament 4.500.000 glòbuls vermells a cada mil·límetre cúbic d'aquesta, calcula en notació científica el nombre aproximat de glòbuls vermells.

$2,25 \cdot 10^{13}$ glòbuls vermells

d) La velocitat de la llum és $3 \cdot 10^8$ m/s. Quina distància recorre la llum en un any?

$9,45 \cdot 10^{15}$ km

Prova tipus del Campionat Mundial de Càlcul Mental

5610573290	3795512078	1552722786	3208483071
+1017412228	+5889057304	+2825340933	+9543948280
+1721771689	+3406541839	+6403464649	+9377048096
+1719921467	+9418881685	+2959189826	+7598726341
+3295673466	+5242140467	+6423005012	+8853013960
+5721082017	+9761378291	+5495287249	+2193639007
+3727324355	+5419329254	+8089242545	+3419945735
+6965313552	+2747822646	+2039566628	+8819486717
+2785751102	+1635733609	+3786512718	+9897579704
<u>+9217795089</u>	<u>+3773979606</u>	<u>+7172334283</u>	<u>+3219500606</u>

1056137536	1494007438	8909304907
+8054321005	+7016177259	+1008857903
+8040969349	+7757183421	+8032954584
+6971653395	+5031166870	+6216954824
+9111271991	+1614787791	+1706106353
+4466914165	+1010681464	+2521596440
+5158327607	+6438745208	+4360617716
+4861903776	+8800277003	+8161105453
+8201915499	+1570685931	+7933961874
<u>+1728739932</u>	<u>+6568028863</u>	<u>+6618701623</u>

4727433112	8694362942	6515084461
+9753899808	+8265910876	+7827774953
+1093612687	+8922781389	+4193218893
+4208862516	+8762264449	+9733276216
+3745451926	+9061684385	+3174623462
+7280371994	+5437880436	+7832076479
+6032053865	+1619769021	+1576947865
+7958332953	+5784176450	+8062275816
+2343099784	+6120030305	+1385478263
<u>+4044098014</u>	<u>+6976204602</u>	<u>+6068526048</u>

01-05-2018
04-08-2037
31-01-1853
27-07-1778
27-01-1705
08-07-1753
08-02-1729
01-06-2091
25-12-1743
17-11-1769
24-07-1710
13-12-1949
13-12-1822
20-05-1621
25-08-1811
08-06-1926
31-08-1618
23-11-1781
14-07-1638
29-04-1949
04-08-1705
07-04-2046
22-02-1936
04-03-1954
15-12-1837
18-01-1650
26-09-1973
14-11-1832
07-01-1872
18-03-1715
06-11-1700
16-01-1864
19-10-1675
10-01-2042
15-01-2040
27-01-2076
16-05-1972
08-07-1819
28-10-1782
31-12-1894
27-04-2009
27-09-1721
15-09-1815
24-10-1749
03-02-2026
04-01-1801
05-07-1839
04-07-2003
05-10-2095
02-09-2019

14-08-1699
27-11-1865
24-12-1639
16-08-1614
20-08-2006
01-01-1667
05-11-1694
07-12-1822
14-11-1891
29-04-1759
15-11-1604
11-06-1777
10-01-1991
22-07-2051
10-11-1795
21-08-2036
19-06-1708
08-04-2087
22-05-1919
09-03-2091
12-03-1791
21-07-1603
23-06-1600
29-03-1647
22-10-1963
25-09-1976
05-11-1899
15-10-1836
13-04-1931
01-03-1900
03-06-1700
05-11-1887
08-12-1926
22-03-1914
31-08-1618
17-02-1670
14-12-1926
01-06-1693
15-08-2047
25-05-1758
11-08-1999
10-04-1619
24-05-2100
16-07-2027
07-02-2047
06-06-1644
24-08-2051
24-02-1722
09-07-1964
30-06-1853

67341889
•45492768

72182126
•94767619

75895761
•52994530

17232728
•77680686

42292116
•20056146

57781770
•15273193

32995400
•33155607

83225197
•28051527

55215315
•86014685

78632866
•72093228

$$\sqrt{342624} =$$

$$\sqrt{522862} =$$

$$\sqrt{967352} =$$

$$\sqrt{239432} =$$

$$\sqrt{654218} =$$

$$\sqrt{641284} =$$

$$\sqrt{550976} =$$

$$\sqrt{813906} =$$

$$\sqrt{504206} =$$

$$\sqrt{305608} =$$

$$\sqrt[3]{922254} =$$

$$\sqrt[3]{939506} =$$

$$\sqrt[3]{218750} =$$

$$\sqrt[3]{645461} =$$

$$\sqrt[3]{209687} =$$

$$\sqrt[3]{696109} =$$

$$\sqrt[3]{430953} =$$

$$\sqrt[3]{705686} =$$

$$\sqrt[3]{940214} =$$

$$\sqrt[3]{294162} =$$

571689	893808	937718	791730
+226850	+440877	+700083	+858300
-912029	-178846	-738322	-469589
-362826	-334246	-964891	-566895
+498586	+225347	+362758	+267027
+403708	+563252	+122193	+915046
-500217	-518358	-544326	-152528
<u>-423788</u>	<u>-949176</u>	<u>-812205</u>	<u>-915228</u>

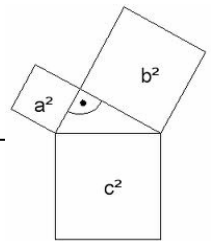
425458	936890	936124	608968
+189077	+609189	+443498	+440637
-906438	-422641	-432906	-778291
-799936	-844402	-105077	-123746
+404769	+613912	+970890	+306013
+648237	+634905	+360169	+765209
-758983	-129902	-413101	-908267
<u>-909237</u>	<u>-770533</u>	<u>-106519</u>	<u>-700017</u>

951236	169504	174909	992780
+533184	+514941	+115141	+180213
-466878	-922401	-255360	-542871
-560605	-987589	-708908	-601407
+878973	+181377	+135109	+621810
+543365	+284107	+807226	+248117
-612750	-778626	-303255	-576982
<u>-235369</u>	<u>-671479</u>	<u>-200363</u>	<u>-148949</u>

135421	335838	946688	149054
+410496	+584394	+247658	+994286
-604656	-546736	-762352	-401994
-248496	-329198	-436991	-767976
+675540	+127673	+408667	+443413
+493636	+436822	+649695	+911055
-369036	-228963	-606057	-360567
<u>-966420</u>	<u>-683131</u>	<u>-956162</u>	<u>-464461</u>

804227	921188	518998	141711
+390335	+871447	+361683	+112644
-478073	-545684	-608873	-622753
-367042	-894248	-675624	-368745
+177512	+263600	+755328	+509603
+992421	+731841	+499663	+241419
-443826	-909338	-776671	-392900
<u>-289243</u>	<u>-644890</u>	<u>-544554</u>	<u>-904234</u>

$$a^2 + b^2 = c^2$$



a=17 c=56 b=

a=18 c=34 b=

a=66 c=89 b=

a=30 c=90 b=

a=13 c=80 b=

a=41 c=98 b=

a=18 c=19 b=

a=27 c=56 b=

a=12 c=62 b=

a=28 c=32 b=

a=62 c=64 b=

a=58 c=90 b=

a=32 c=67 b=

a=77 c=91 b=

a=34 c=85 b=

a=17 c=55 b=

a=18 c=50 b=

a=58 c=91 b=

a=38 c=95 b=

a=32 c=47 b=

a=31 c=62 b=

a=17 c=84 b=

a=27 c=70 b=

a=86 c=98 b=

a=50 c=77 b=

a=21 c=48 b=

a=41 c=54 b=

a=66 c=88 b=

a=30 c=99 b=

a=25 c=62 b=

a=40 c=95 b=

a=72 c=81 b=

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$$

25.0 m = _____ ft _____ in

$>$ (größer als) oder $<$ (kleiner als) ?
 $>$ (greater than) or $<$ (less than) ?
 $>$ (supérieure à) ou $<$ (inférieure à) ?
 $>$ (mayor que) o $<$ (menor que) ?

$$\frac{603}{109} + \frac{1104}{43} + \frac{97}{17} \quad 37$$

$$\frac{113}{49} + \frac{902}{21} + \frac{963}{54} \quad 63$$

$$\frac{54}{46} + \frac{284}{249} + \frac{22}{28} \quad 3$$

$$\frac{230}{43} + \frac{474}{181} + \frac{614}{31} \quad 28$$

$$\frac{522}{85} + \frac{192}{157} + \frac{594}{172} \quad 11$$

$$\frac{479}{31} + \frac{213}{84} + \frac{224}{19} \quad 30$$

$$\frac{391}{31} + \frac{231}{36} + \frac{510}{16} \quad 51$$

$$\frac{138}{103} + \frac{115}{59} + \frac{440}{228} \quad 5$$

$$\frac{46}{68} + \frac{67}{118} + \frac{52}{98} \quad 2$$

$$\frac{75}{85} + \frac{298}{71} + \frac{578}{39} \quad 20$$

$$\frac{313}{260} + \frac{409}{19} + \frac{241}{168} \quad 24$$

$$\frac{210}{217} + \frac{584}{18} + \frac{59}{124} \quad 34$$

$$\frac{760}{36} + \frac{246}{149} + \frac{632}{21} \quad 53$$

$$\frac{33}{255} + \frac{148}{122} + \frac{309}{35} \quad 10$$

$$\frac{19}{63} + \frac{63}{146} + \frac{186}{26} \quad 8$$

$$\frac{1683 \cdot 4642}{1899 \cdot 22} =$$

$$\frac{651 \cdot 2706}{341 \cdot 369} =$$

$$\frac{1185 \cdot 5698}{1738 \cdot 35} =$$

$$\frac{1918 \cdot 5313}{822 \cdot 253} =$$

$$\frac{902 \cdot 1917}{369 \cdot 781} =$$

$$\frac{429 \cdot 4690}{134 \cdot 455} =$$

$$\frac{2652 \cdot 6161}{5151 \cdot 122} =$$

$$\frac{3702 \cdot 770}{3085 \cdot 28} =$$

$$\frac{959 \cdot 2604}{548 \cdot 21} =$$

$$\frac{798 \cdot 494}{247 \cdot 42} =$$

$$\frac{438 \cdot 836}{66 \cdot 1387} =$$

$$\frac{5330 \cdot 1045}{1025 \cdot 26} =$$

$$\frac{1245 \cdot 2331}{581 \cdot 333} =$$

$$\frac{4865 \cdot 1911}{417 \cdot 245} =$$